

Приложение к журналу

КВАНТ

№4/2004

А.Л.Стасенко

ФИЗИЧЕСКИЕ НОВЕЛЛЫ ДЛЯ «ШКОЛЫ В «КВАНТЕ»

Бюро



Квантум.

П Р И Л О Ж Е Н И Е
к журналу **КВАНТ** №4/2004

А.Л.Стасенко

**ФИЗИЧЕСКИЕ НОВЕЛЛЫ
ДЛЯ «ШКОЛЫ В «КВАНТЕ»**



Москва 2004
Бюро Квантум

УДК 373.167.1:53+5.3(075.3)
ББК 22.3я721
С77

Приложение
к журналу «Квант»
№4/2004

С77 Стасенко А.Л. **Физические новеллы для «Школы в «Кванте»**. – М.: Бюро Квантум, 2004. – 128 с. – (Прил. к журналу «Квант» №4/2004)
ISBN 5-85843-051-1

Книга представляет собой сборник статей по всем разделам школьной физики, опубликованных в журнале «Квант» в рубрике «Школа в «Кванте». Небольшой объем, незагруженность математическими выкладками и живость изложения – вот отличительные особенности этих статей.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для членов и руководителей кружков и факультативов, а также для всех тех, кому просто интересна физика.

ББК 22.3я721

ISBN 5-85843-051-1

© Бюро Квантум,
«Квант», 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Кому нужна высокая башня?	5
Первый велосипед	9
Как бесплатно улететь на каникулы	13
Не стреляйте в белых лебедей	18
Как подпрыгнуть выше крыши	24
Как гора спутник родила	29
Рыцарь над пропастью, или Немного о законах сохранения	35
Как Студент на сверхзвук выходил	39
Ужасы резонанса	44
Кладовые энергии молекулы	48
Еще один вечный двигатель?	55
Костры в поле и русская баня	60
Паровой скалолаз, или Термодинамика для альпиниста	65
Где найти прошлогоднюю зиму?	69
Как в землю казан закопали	72
Сколько пузырьков в шампанском?	78
Кто-то приближается?	85
Зачем быть конденсатору в магнитном поле?	92
Пределы зоркости приборов	95
Волны на пляже, Солнце в небе и многое другое	101
Физическая оптика и два верблюда	106
Зачем закрывать отверстие, или Открытие линзы	111
Свист поезда и свет галактик	117
Из глубин Вселенной	122

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге представлена одна из постоянных рубрик нашего журнала – «Школа в «Кванте». Возникнув около двадцати пяти лет назад, «Школа» сразу завоевала популярность у читателей, интерес к ней не ослабевает и по сей день.

Материалы этой рубрики, как правило менее сложные и элитарные по сравнению с материалами других рубрик, рассчитаны на самый широкий круг читателей. Можно сказать, что «Школа в «Кванте» – это занимательное чтение «вдоль» школьной программы. Темы статей обычно перекликаются с разделами программы, изучаемыми в школе в момент выхода журнала в свет.

Небольшой объем, незагруженность математическими выкладками, живость и своеобразная эссеичность изложения не только делают статьи «Школы» доступными для самостоятельного изучения, но и позволяют использовать их для докладов и рефератов на школьных факультативах и конференциях или просто для «оживления» текущих занятий.

За прошедшие десять лет накопилось так много статей «Школы в «Кванте» одного из наших замечательных и постоянных авторов – Альберта Леонидовича Стасенко, что мы решили собрать их в отдельной книге, куда вошли статьи по всем разделам школьной физики – от механики до атомного ядра.

КОМУ НУЖНА ВЫСОКАЯ БАШНЯ?

Ну например, Галилею: «Галилей проделал опыт. Он взял пушечное ядро... и мушкетную пулю... и сбросил их с высоты 60 м. Оба тела достигли поверхности земли одновременно. Теория Аристотеля потерпела сокрушительное поражение. <В этом-то и была вся штука, но не это сейчас главное. – А.С.> Согласно легенде, считают, будто Галилей... использовал для этого эксперимента Пизанскую падающую башню. Башня эта, безусловно, как нельзя лучше подходит для упомянутой цели...» (Г.Липсон. Великие эксперименты в физике. М.: Мир, 1972, с.13).

Разумеется, башни строились не только для физических опытов. Прежде всего, с них далеко видно – а при отсутствии радио, телевидения и телефона это было очень важно. Из рисунка 1 можно получить дальность видимости:

$$AB = \sqrt{(R + h)^2 - R^2}.$$

(Это – теорема Пифагора, примененная к прямоугольному треугольнику OBA ; угол B – прямой, так как луч зрения есть касательная к окружности сечения Земли, принимаемой за шар.) Так как высота башни обычно много меньше радиуса Земли, полученную формулу можно упростить (пренебрегая малой величиной h^2):

$$AB \approx \sqrt{2Rh}.$$

Например, с Пизанской башни (при высоте $h = 60$ м и радиусе Земли $R = 6400$ км) видно на расстоянии порядка 28 км, что было неплохо для средневековой городской стражи. (В качестве

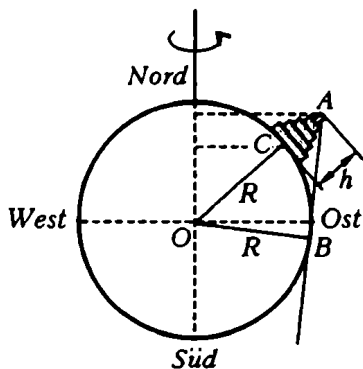


Рис. 1

тренировки оцените дальность видимости с Останкинской башни высотой $h \approx 300$ м.) С высоких колоколен и башен, как говорят легенды и история, пытались прыгать первые дельтапланеристы и парашютисты – увы, иногда неудачно. В наше время передающие и принимающие антенны телевидения устанавливают тоже как можно выше (аж на спутниках), потому что в этом диапазоне

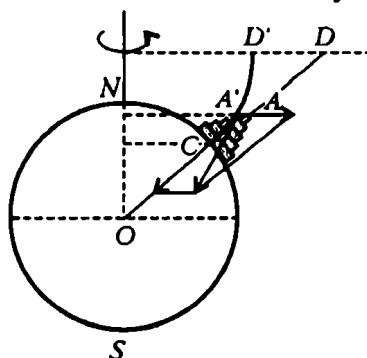


Рис. 2

длин волн важна «прямая видимость».

Итак, будем делать башню все выше и выше. Вот уже ее надстроили так, что вершина переместилась из точки A в точку D (рис.2). Но тут пора вспомнить, что Земля вращается вокруг оси юг–север (*Süd–Nord*). Значит, строитель башни (а вместе с ним и его профессионально неотъемлемый отвес) находится на карусели. А как известно, если вы

стоите на вращающейся платформе, крепко держась за что-нибудь, вам кажется, что на вас действует сила, направленная по радиусу наружу. Хотя при этом вы вращаетесь вместе с платформой, т.е. двигаетесь по окружности и, следовательно, имеете ускорение, направленное к центру (центростремительное ускорение). Эта сила, стремящаяся отбросить вас к периферии, как раз и возникла из-за того, что вращающаяся система отсчета относится к большому классу так называемых неинерциальных систем. Назовем эту силу центробежной силой инерции («бежный» указывает направление от оси вращения).

Чем выше над поверхностью Земли, тем больше будет центробежная сила инерции, перпендикулярная оси вращения. И, заодно, тем меньше сила притяжения к центру Земли. Значит, с увеличением расстояния от Земли равнодействующая этих двух сил все больше будет отклоняться от направления на центр O . В результате строитель, честно следуя указаниям отвеса, построит не ровную башню CAD , направленную строго по радиусу, а «кривую» башню $CA'D'$, которая и будет самой ровной, с точки зрения строительного искусства. (Строго говоря, и стены высоких домов тоже не плоские по той же причине.)

И только на полюсах и на экваторе башни будут иметь прямую ось: в первом случае просто нет центробежной силы инерции, во втором она есть, но направлена строго вдоль самой оси. Впрочем, что значит «строго»? Ведь если с одной стороны экваториальной

башни окажется гора Килиманджаро, а с другой стороны такой горы нет, то ось башни слегка искривится в сторону горы. Есть даже очень тонкая наука – гравиметрия, которая изучает такое искривление гравитационного поля и позволяет установить не только влияние гор (они и так видны), но и уплотнений внутри земной коры (например, рудоносных пластов, что гораздо важнее).

А куда же все-таки упадет тело, если его уронить с вершины D' башни $CA'D'$? Взглянем теперь на картину «сверху», вдоль оси вращения (рис.3). Изобразим линейные скорости (с индексом φ , который означает угол поворота вокруг оси вращения SN) в нескольких точках. Величина линейной скорости, очевидно, тем больше, чем больше расстояние данной точки до оси вращения. Согласно первому закону Ньютона, падающее тело будет сохранять окружную скорость $V_{\varphi D'}$, т.е. скорость той точки, в которой его отпустили (понятно, мы пренебрегаем сопротивлением воздуха).

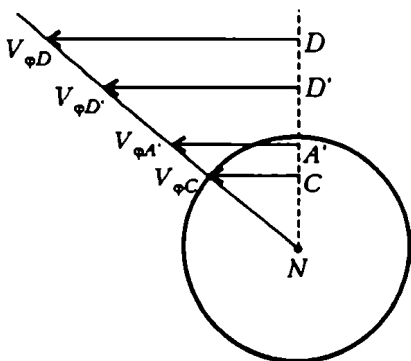


Рис. 3

Скорость подножия башни $V_{\varphi C}$ меньше $V_{\varphi D'}$. Значит, за время падения тело переместится на восток дальше, чем основание башни, и не упадет к подножию башни, а отклонится к направлению на восход Солнца. Кстати, этими же простыми рассуждениями можно объяснить и многие другие интересные факты. Например, почему у меридиональных рек северного полушария крутыми являются правые берега (Волга, Енисей), а в южном полушарии – левые (притоки Амазонки); можно даже и не ездить туда, чтобы убедиться в этом, а лишь хорошенько подумать.

Но, может быть, падающее тело отклонится еще и к югу под действием центробежной силы инерции? Так оно и было бы, если бы строитель сделал «ровную» (радиальную) башню, но ведь его отвес уже учел эту силу в составе равнодействующей.

Пусть мы все-таки построили «самую ровную» башню высотой h на полюсе. Зачем? Конечно, чтобы подвесить к ее вершине математический маятник длиной h . Период его колебаний, как известно, равен $2\pi\sqrt{h/g}$, а частота равна $\omega = \sqrt{g/h}$. Если бы Земля не вращалась, отклонение маятника от полюса происходило бы в фиксированной меридиональной плоскости и изменялось

бы со временем по закону

$$r(t) = r_0 \sin \omega t$$

(r_0 – амплитуда отклонения). Но, поскольку Земля вращается с угловой скоростью Ω «под колеблющимся маятником», его движение относительно Земли будет сложным. Угол φ той меридиональной плоскости, в которой начались колебания, в системе координат, связанной с Землей, линейно растет со временем: $\varphi = \Omega t$. Поэтому получаем

$$r(\varphi) = r_0 \sin \left(\frac{\omega}{\Omega} \varphi \right).$$

Эта зависимость в декартовой системе координат r , φ изображена на рисунке 4. Ну и что тут особенного – обыкновенная синусоида, только в интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ уложится не одно

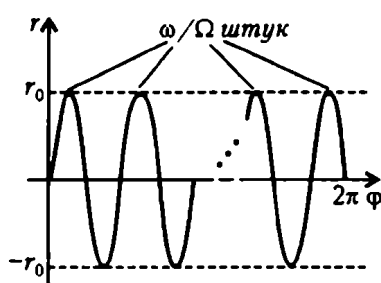


Рис. 4

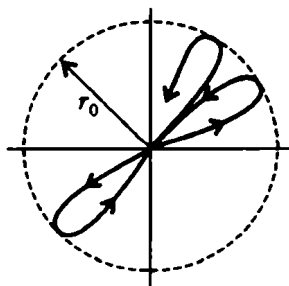


Рис. 5

колебание (как у функции $\sin \varphi$), а в ω/Ω раз больше (причем это число необязательно целое). А в полярной системе координат эта зависимость изображена на рисунке 5 (рисунок качественный; если можете, нарисуйте точнее, взяв конкретные значения h).

Так что, физики ради – стройте высокие башни, но, пожалуйста, не роняйте с них тяжелые предметы!

ПЕРВЫЙ ВЕЛОСИПЕД

В прошлые годы я слышал заявления о том, что русские много делают в науке первыми... С течением времени я осознал, что большинство их соответствует истине.

**Х.Р.Кауфман. Тактика успеха и
бизнес в науке**

Старые люди помнят, как два миллиона лет назад великий инженер Нга-Нга изобрел первый велосипед, еще не зная, что колеса должны быть круглыми. Откуда ему было знать? Но с тех пор возникла потребность в теории велосипеда: нужно было узнать, какая мощность расходуется при его движении, каковы оптимальные режимы езды, как обеспечивается его устойчивость – короче, бездна вопросов. Здесь мы попробуем ответить лишь на их малую часть.

Рассмотрим сначала одно «колесо» от первого велосипеда, изображенное на рисунке 1. При перемещении из состояния 1 в состояние 2 его «ось» опишет четверть окружности O_1O_2 с

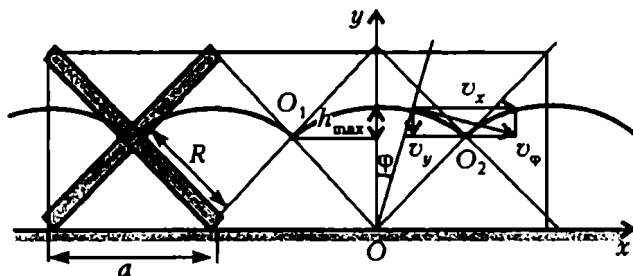


Рис. 1

радиусом $R = a/\sqrt{2}$ и центром в точке O (проскальзывание отсутствует). Будем отсчитывать угол поворота колеса от вертикальной оси Oy вправо. Тогда положению 1 соответствует угол $\varphi_1 = -\pi/4$, положению 2 – угол $\varphi_2 = +\pi/4$. Если линейную

(окружную) скорость обозначить через v_ϕ , то горизонтальная и вертикальная составляющие скорости центра колеса будут равны

$$v_x = v_\phi \cos \phi, \quad v_y = -v_\phi \sin \phi. \quad (1)$$

Их зависимости от угла ϕ изображены на рисунке 2. Видно, что через каждую четверть оборота вертикальная составляющая

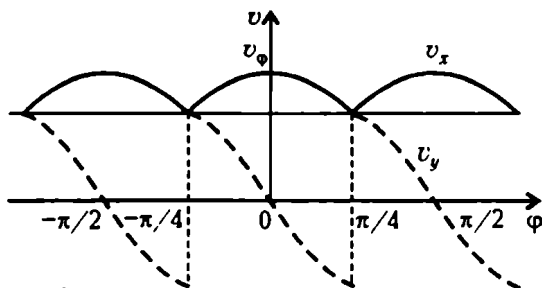


Рис. 2

«рвется»: ее модуль остается прежним, а направление изменяет знак.

Если в процессе движения поддерживать постоянной линейную скорость v_ϕ , то угол ϕ будет прямо пропорционален времени; в этом случае рисунок 2 описывает колебания проекций скорости во времени. Только, разумеется, эти колебания нельзя назвать гармоническими, хотя они и описываются тригонометрическими функциями (1).

После начала движения из состояния 1 через осьмущку оборота центр колеса окажется в самой высокой точке, на расстоянии R от земли. Следовательно, по отношению к точке O_1 он поднимется на высоту

$$h_{\max} = R - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

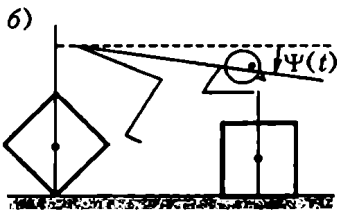
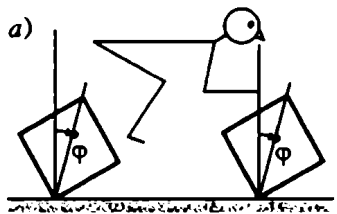


Рис. 3

Но одно колесо (тем более квадратное) – еще не велосипед. Взглянув на рисунок 3, великий Нга-Нга сразу сообразил, что возможны по крайней мере два режима езды:

а) Если оба колеса в начальный момент установлены одинаково (см. рис.3,а), то при отсутствии проскальзывания их «диаметры» будут во все время движения состав-

лечь один и тот же угол φ с вертикалью, а их центры будут всегда лежать на одной и той же высоте (зависящей, конечно, от времени). Как любил говаривать Нга-Нга, они будут колебаться *синфазно*. В этом случае и все остальные точки велосипеда, и все точки самого велосипедиста будут совершать так называемые плоскопараллельные перемещения. И центр масс всей системы будет подниматься на высоту h_{\max} , найденную выше.

б) Если же в начальный момент времени колеса установлены не одинаково, а так, например, как изображено на рисунке 3,б, то их центры будут двигаться со сдвигом фаз 45° . Тогда, очевидно, позвоночник Нга-Нга будет совершать вращательное колебательное движение $(\psi(t))$, а вот центр масс при этом может двигаться строго горизонтально.

Рассмотрим режим а). Чтобы поднять центр масс всей системы на высоту h_{\max} , нужно совершить работу

$$A = mgh_{\max} = mg \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1).$$

Если поддерживать при этом v_φ постоянной, то на этот процесс (осьмушку оборота колеса) уйдет время

$$\tau_1 = \frac{1}{8} \frac{2\pi R}{v_\varphi} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{a}{v_\varphi}.$$

Значит, средняя мощность за это время будет порядка

$$\frac{A}{\tau_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (\sqrt{2} - 1) mg v_\varphi. \quad (2)$$

Какую скорость v_φ может при этом обеспечить велосипедист за счет собственных энергетических ресурсов? Известно, что для человека физического труда (Нга-Нга, понятно, не был белоручкой) требуется в сутки порядка 5000 килокалорий, а коэффициент полезного действия человека приблизительно 25%. Следовательно, мощность человека как машины имеет порядок

$$N_{\text{ср}} = 5000 \cdot 10^3 \frac{\text{кал}}{\text{сутки}} \cdot \frac{4,2 \text{ Дж/кал}}{3600 \frac{\text{с}}{\text{ч}} \cdot 24 \frac{\text{ч}}{\text{сутки}}} \cdot 0,25 \approx 60 \text{ Вт}.$$

При массе велосипеда и седока $m \sim 100$ кг из выражения (2) получим для скорости такую оценку:

$$v_{\varphi 1} = \frac{N_{\text{ср}} \pi}{2\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1) mg} \approx 15 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Но это только первая осьмушка оборота колеса. А дальше,

забравшись на h_{\max} , седок может отдыхать. Тогда при отсутствии потерь энергии он «упадет» с высоты h_{\max} за время

$$\tau_2 \sim \sqrt{\frac{2h_{\max}}{g}}$$

с вертикальной скоростью

$$v_{\phi 2} \sim \sqrt{2gh_{\max}}.$$

А если его не устраивает эта скорость удара, он может сделать «реверс тяги» и опускаться более плавно – но это потребует дополнительной работы, увеличит период колебаний и снизит скорость движения. Не очень-то удобный режим движения.

Режим б) явно предпочтительнее с энергетической точки зрения: тут не нужно периодически приподнимать центр масс, а затем тормозить его падение. Но эти стуки квадратных колес, это сотрясение мозга... Поэтому уже Нго-Нго, сын Нга-Нга, догадался сделать «колесо» восьмиугольным, а внук Нги-Нги – шестнадцатиугольным, и так далее, пока, наконец, Архимед не доказал, что в пределе получится окружность. (Но это уже математика.) А для круглого колеса потребовались дороги, тогда как велосипед Нга-Нга мог «переезжать» через камни и стволы деревьев.

Так что, может быть, он был не так прост, этот великий изобретатель?

КАК БЕСПЛАТНО УЛЕТЕТЬ НА КАНИКУЛЫ

«Однажды в студеную зимнюю пору я из лесу вышел. Был сильный мороз. Гляжу...» Тут Догадливый Студент взглянул на высокое здание общежития – и его осенило. Он хотел домой на каникулы. Но авиабилеты были дороги, идти в ночные грузчики или в «комок» было неохота, а сила Знания безгранична. И осенила его Мысль. Если сделать планер и разогнать его вдоль скользкой оледеневшей крыши... А разогнать при помощи невесомого нерастяжимого троса, перекинутого через блок без трения, и при участии нескольких Преданных Друзей (рис.1). Да

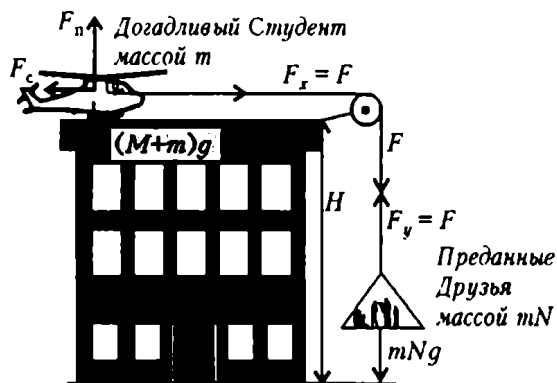


Рис. 1

если при этом еще пренебречь трением о крышу и сопротивлением воздуха...

Итак, пусть масса планера M , масса Догадливого Студента и каждого его Друга m , сила натяжения троса F . Тогда можно записать уравнения второго закона Ньютона для горизонтального движения планера с пилотом (масса $M + m$) и вертикального движения люльки с N Преданными Друзьями (масса mN , а люлька пусть невесома):

$$(M + m)a_x = F_x, \quad mNa_y = mNg - F_y.$$

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1997 год.

Но поскольку трос нерастяжим, модули ускорений его концов и ускоряющих сил одинаковы, т.е. $a_x = a_y = a$, $F_x = F_y = F$. Поэтому предыдущие равенства можно записать в виде одного уравнения (исключив F , как сказал бы математик)

$$(M + m(N + 1))a = mNg. \quad (1)$$

Смысл этого уравнения очевиден: справа стоит сила тяжести всех Преданных Друзей, а слева – масса всей системы (включая массу Догадливого Студента и его планера), которой упомянутая сила тяжести сообщает ускорение a .

Согласно уравнению (1), ускорение постоянно, значит, скорость будет расти со временем линейно, а пройденный путь – квадратично:

$$v = at, \quad s = y = a \frac{t^2}{2},$$

где

$$a = \frac{mN}{M + m(N + 1)} g.$$

Но в рассматриваемой ситуации важно не время. Важно, чтобы высота общежития H и число Преданных Друзей N были достаточны для достижения какой-то наименьшей скорости v , при которой можно будет взлететь. Поэтому, исключив время t , лучше записать зависимость скорости от пройденного пути в виде

$$v = \sqrt{2ay}, \quad \text{или} \quad \frac{v^2}{2} = ay. \quad (2)$$

Последнее равенство уж очень что-то напоминает. Подставив сюда a , получим

$$(M + m(N + 1)) \frac{v^2}{2} = (mNg)y. \quad (3)$$

Это – закон сохранения полной механической энергии: кинетическая энергия общей массы системы $M_0 = M + m(N + 1)$ приобретается за счет изменения потенциальной энергии Преданных Друзей при их опускании по вертикальной координате от 0 до $-y$, или за счет работы постоянной силы mNg на пути $s = y$. И «энергетическое» утверждение (3) в отсутствие потерь механической энергии (что и предполагалось) адекватно «силовому» уравнению (1).

Итак, в принятых предположениях удельная кинетическая энергия системы $v^2/2$ (в расчете на единицу массы) пропорциональна расстоянию y (см. равенство (2) и рисунок 2). Но какую наименьшую скорость v , надо набрать при $y = H$? Очевидно,

такую, при которой подъемная сила планера F_n станет равной силе тяжести $(M + m)g$.

Из соображений размерностей, например, легко понять, что подъемная сила пропорциональна квадрату скорости, площади крыла S и плотности воздуха ρ :

$$F_n \sim \frac{v^2}{2} S \rho. \quad (4)$$

А чтобы знак пропорциональности заменить знаком равенства, нужно поставить в эту формулу еще какой-то безразмерный множитель C , который зависит от конструкции планера, но никак не «охватывается» теорией размерности. Для его определения нужны другие теории или эксперимент. Он так и называется: коэффициент сопротивления.

Таким образом, чтобы взлететь, нужно соблюсти условие

$$C \frac{v_*^2}{2} S \rho = (M + m)g. \quad (5)$$

На рисунке 2 проведена горизонтальная прямая, соответствующая этой наименьшей скорости v_* .

И тут Догадливого Студента осенила следующая мысль: как же так – подъемная сила есть, значит, воздух есть, а сопротивления воздуха нет?! Не может такого быть. Поэтому либо в уравнение (1) нужно добавить силу сопротивления воздуха F_c , либо в уравнение (3) – ее работу. По-видимому, сила сопротивления должна зависеть от тех же величин, что и подъемная сила (см. равенство (4)), только с каким-то другим безразмерным коэффициентом сопротивления C_x . Чем меньше сопротивление при данной подъемной силе, тем более совершенен летательный аппарат. Существует понятие аэродинамического качества летательного аппарата $K = C/C_x$, с помощью которого силу сопротивления планера можно записать в виде

$$F_c = -\frac{F_n}{K} = -\frac{C}{K} \frac{v^2}{2} S \rho.$$

Добавим теперь работу этой силы в уравнение (3). Но поскольку эта сила изменяется по мере ускорения планера, уравнение нужно записывать не для конечного расстояния y , а для малых приращений Δy , внутри каждого из которых пере-

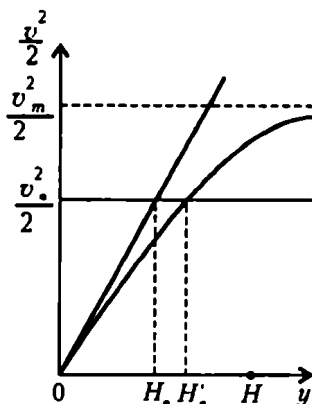


Рис. 2

менные силы можно считать постоянными:

$$M_0 \Delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = mNg \Delta y - \frac{C}{K} S \rho \left(\frac{v^2}{2} \right) \Delta y. \quad (6)$$

Получилось так называемое дифференциальное уравнение относительно $v^2/2$ как функции y . Эти страшные слова не смутили Догадливого Студента. Уравнение простенькое, решать такие он умел еще в школе. Но многое можно сказать, даже не решая это уравнение.

Например, совершенно ясно, что в любой момент времени (или при любом значении y) скорость планера с учетом силы сопротивления будет меньше, чем без учета этой силы. Значит, соответствующая кривая на рисунке 2 пойдет ниже прямой αy . Далее, когда (из-за увеличения скорости) сила сопротивления станет равной постоянной силе тяжести mNg , скорость перестанет изменяться и достигнет предельного значения v_m . Положив левую часть уравнения (6) равной нулю, получим

$$\frac{v_m^2}{2} = mNg \frac{K}{CS\rho}. \quad (7)$$

Эта горизонтальная прямая проведена штрихами на рисунке 2. Именно к ней будет асимптотически стремиться (никогда не достигнув) кривая зависимости удельной кинетической энергии от расстояния. Из рисунка видно, что теперь (с учетом силы сопротивления) эта кривая пересечет прямую $v^2/2$, соответствующую наименьшей требуемой скорости v_* , при $H'_* > H_*$. Если вообще пересечет — для этого нужно соблюдение условия $v_m^2/v_*^2 > 1$. Тогда, разделив друг на друга равенства (7) и (5), получим

$$\frac{mNK}{M+m} > 1.$$

Видно, что друзей надо приглашать побольше (увеличивать N) или делать планер полегче (уменьшать M) и аэродинамически совершеннее (увеличивать K). Все это очевидно, но теперь можно ответить и на вопросы «сколько?».

И еще одно важное наблюдение сделаем, не решая уравнение (6), а лишь слегка преобразовав его. Используем характерную скорость v_m в качестве масштаба скоростей. Для этого уравнение (6) разделим на равенство (7) и на суммарную массу M_0 :

$$\Delta \left(\frac{v}{v_m} \right)^2 = \left(1 - \left(\frac{v}{v_m} \right)^2 \right) \left(\frac{CS\rho}{KM_0} \right) \Delta y. \quad (8)$$

Теперь видно, что и расстояние Δy просто напрашивается отнести к некоторой характерной величине, имеющей размерность длины. Она уже приготовлена во вторых скобах правой части последнего уравнения. Обозначим ее через h :

$$h = \frac{KM_0}{CS\rho}.$$

Пусть, например, качество планера соответствует $K \sim 10$, площадь его крыла $S \sim 10 \text{ м}^2$, суммарная масса всей движущейся системы $M_0 \sim 10^3 \text{ кг}$, плотность морозного воздуха $\rho \sim 1 \text{ кг/м}^3$, а безразмерный коэффициент подъемной силы $C \sim 1$. Тогда получим $h \sim 10 \text{ м}$.

Введенная нами h – не случайная комбинация букв. Она действительно характеризует то расстояние, на котором скорость «почти» достигает своего максимального значения, или, как говорят физики, релаксирует к установившемуся значению. Поэтому h можно назвать длиной релаксации.

Сказанного уже вполне достаточно. Но уж совсем Любопытный Читатель может потребовать точную зависимость скорости планера от расстояния. Пожалуйста. Для этого нужно просто решить уравнение (8), добавив к нему начальное условие: при $y = 0$ скорость планера $v = 0$. Учтем еще, что $\Delta(v/v_m)^2 = -\Delta(1 - (v/v_m)^2)$, и введем новую переменную

$$\beta = 1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^2.$$

Тогда уравнение (8) запишется в виде

$$d\beta = -\beta \frac{dy}{h}.$$

Это уравнение широко известно в науке. В нашем случае его решение с упомянутым начальным условием имеет такой вид (не верите – спросите любого прохожего):

$$\left(\frac{v}{v_m}\right)^2 = 1 - e^{-y/h}.$$

И теперь уж Догадливый Студент, измерив высоту общежития H , точно может сказать, сколько Преданных Друзей нужно пригласить, чтобы его планер достиг необходимой скорости.

НЕ СТРЕЛЯЙТЕ В БЕЛЫХ ЛЕБЕДЕЙ

Владимир ... после каждого неудачного выстрела удивлялся, осматривал и продувал ружье, недоумевал и, наконец, излагал нам причину, почему он промахнулся.

И.С.Тургенев

Известно, что на тело, движущееся в воздухе, действует сила сопротивления F . Почти очевидно, что эта сила зависит от скорости движения v и размеров тела, например площади поперечного сечения S , причем эта зависимость типа «чем больше v и S , тем больше F ». Можно еще уточнить вид этой зависимости, исходя из соображений размерностей (единиц измерения). Действительно, сила измеряется в ньютонах ($[F] = \text{Н}$), а $\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$. Видно, что секунда в квадрате входит в знаменатель. Отсюда сразу ясно, что сила должна быть пропорциональна квадрату скорости тела ($[v^2] = \text{м}^2/\text{с}^2$) и плотности ($[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3$) – конечно, той среды, в которой движется тело. Итак,

$$F \sim \rho S v^2.$$

А чтобы подчеркнуть, что эта сила направлена против вектора скорости, можно записать так:

$$\vec{F} \sim -\rho S v \vec{v}.$$

Мы узнали уже очень много, но это еще не все. Наверняка сила сопротивления (аэродинамическая сила) зависит и от формы тела – не случайно ведь летательные аппараты делаются «хорошо обтекаемыми». Чтобы учесть и эту предполагаемую зависимость, можно в полученное выше соотношение (пропорциональность) ввести безразмерный множитель, который не нарушит равенства размерностей в обеих частях этого соотношения, но превратит его в равенство:

$$\vec{F} = -\alpha \rho S v \vec{v}.$$

Опубликовано в «Кванте» №5 за 1998 год.

Представим себе шарик, движущийся в воздухе, – например дробинку, горизонтально вылетевшую с начальной скоростью \vec{v}_0 . Если бы не было сопротивления воздуха (в школьных задачах обычно так и говорится: «сопротивлением воздуха пренебречь»), то на расстоянии x за время $t_0 = x/v_0$ дробинка сместилась бы по вертикали вниз на

$$y_0 = \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0} \right)^2. \quad (1)$$

Соответствующая кривая (парабола) изображена на рисунке 1 штриховой линией (заметим, что ось y направлена вниз). Но из-за действия силы сопротивления (направленной против вектора скорости) время полета дробинки до вертикальной плоскости x будет больше t_0 . Следовательно,

сила тяжести \vec{mg} дольше будет действовать на дробинку, так что она опустится ниже y_0 . И вообще, дробинка будет двигаться по другой кривой (сплошная линия на рисунке 1), уже не являющейся параболой (ее называют *баллистической траекторией*).

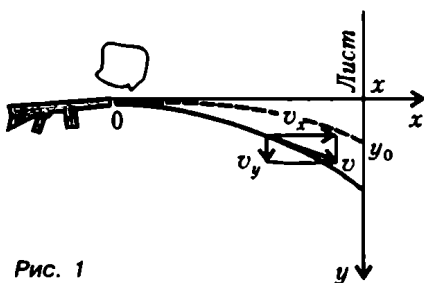


Рис. 1

И тут наше успешное продвижение в познании силы сопротивления резко замедляется. Соображения размерности уже бесполезны: ведь α – безразмерный множитель. Чтобы узнать его для тела конкретной формы, нужны либо численные решения уравнений газодинамики (описывающих движение воздуха вокруг этого тела), либо экспериментальные исследования (есть наука, которая так и называется: *экспериментальная аэродинамика*).

Что можно сказать об этой кривой? Если были бы известны начальная скорость дробинки v_0 и коэффициент α в силе сопротивления, то нужно было бы написать уравнение второго закона Ньютона и решить его. Это – дело математики, но кто даст математикам эти величины? Попробуем справиться сами.

Примем такой план действий:

1) Постараемся как можно подробнее (при наших скромных математических знаниях) описать движение дробинки для любых значений α и v_0 .

2) Экспериментально измерим вертикальные смещения дро-

бинки, например, при помощи вертикального листа бумаги, помещенного на известном расстоянии x от ружья.

3) Сравнивая теорию и эксперимент, получим α и v_0 .

Это — самая обычная в естественных науках взаимопомощь теоретических представлений и опыта.

Итак, прежде всего запишем уравнение движения дробинки под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и силы сопротивления воздуха \vec{F} , определенной выше:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha \rho S v \vec{v}.$$

Разделим обе части этого уравнения на массу дробинки m . Очевидно, что тогда последнее слагаемое будет обратно пропорционально радиусу дробинки: действительно, площадь поперечного сечения шарика пропорциональна квадрату радиуса, а объем (и, значит, масса) — кубу радиуса. Если считать, что α не зависит от размеров шарика, то эту величину и плотность воздуха можно «спрятать» в новую постоянную β , так что получим

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{\beta}{r} v \vec{v}. \quad (2)$$

Заметим, что в отсутствие сопротивления (когда α и β равны нулю) траектории всех дробинок одинаковы и все они попадут в точку y_0 . А вот сопротивление воздуха как раз и позволяет «рассортировать» их по размерам. (Это же «сортирующее свойство» используется в сельском хозяйстве, на току, когда боковой ветер отделяет легкую шелуху от полновесных зерен.) Из уравнения (2) видно, что чем меньше дробинка, тем сильнее влияет на ее движение воздух (радиус входит в знаменатель). И наоборот, чем массивнее тело, тем с большей точностью можно пренебречь сопротивлением, так что останется только сила тяжести ($\vec{a}_0 = \vec{g}$). Только в этом предельном случае и верен вывод из экспериментов Галилея, бросавшего пушечные ядра и мушкетные пули с башни: «скорость падающих тел одинакова, независимо от их веса». Но мы здесь как раз и хотим использовать «сортирующее свойство» силы сопротивления воздуха. Поэтому подробнее исследуем уравнение (2).

Модуль скорости связан с горизонтальной и вертикальной составляющими соотношением $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. И тут сделаем первое упрощающее предположение. Интуитивно ясно, что вначале скорость вертикального падения дробинки много меньше скорости горизонтального движения (если не очень удаляться от ружья), а уж их квадраты и подавно сильно отличаются друг от

друга. Значит, можно приближенно считать, что $v = v_x$.

Теперь сделаем второе упрощающее предположение. Будем считать, что сила сопротивления воздуха при вертикальном перемещении дробинки мала по сравнению с силой тяжести (в начальный момент времени она вообще равна нулю). Можно короче сформулировать это предположение так: будем считать, что дробинка перемещается в горизонтальном направлении с большой скоростью и заметно тормозится при этом (ведь сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости), а в вертикальном направлении она перемещается как свободно падающее (без сопротивления) тело по тому же закону (1):

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_{xcp}} \right)^2, \quad (3)$$

в который, однако, входит средняя горизонтальная скорость v_{xcp} на отрезке $0x$.

В этих предположениях уравнение (2) для горизонтального и вертикального движений примет вид

$$a_x = -\frac{\beta}{r} v_x^2, \quad a_y = g. \quad (4)$$

Решение второго уравнения уже найдено: это равноускоренное падение (3). Рассмотрим первое уравнение. Ускорение равно отношению изменения скорости Δv_x ко времени Δt , которое, в свою очередь, можно выразить через скорость v_x , а именно: $\Delta t = \Delta x / v_x$. Итак,

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x},$$

и тогда первое уравнение можно сократить на v_x и получить

$$\Delta v_x = -\frac{\beta}{r} v_x \Delta x. \quad (5)$$

Это так называемое *релаксационное уравнение*: изменение искомой величины (в данном случае – горизонтальной составляющей скорости) пропорционально самой величине. (Таким же уравнением описывается, например, и распад радиоактивного вещества, тогда под v_x надо понимать количе-

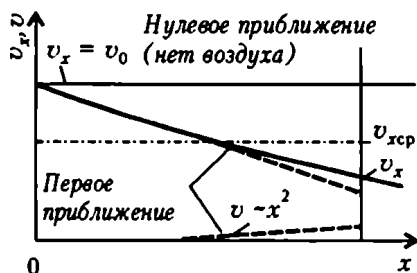


Рис. 2

ство оставшегося вещества, а под x – время.) И решение этого уравнения известно – это *экспонента*. Но чтобы не пугать себя словами, посмотрим на рисунок 2 и заметим, что на начальном участке изменение величины v_x очень похоже на прямую (пунктир). Попробуем оценить изменение горизонтальной скорости, не решая уравнение (5) точно. Когда физики не могут (или не хотят) решать точно, они применяют *метод последовательных приближений*. Он «работает» так.

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то решение известно: $v_x = v_0$ – горизонтальная составляющая скорости не изменяется. Подставим это так называемое нулевое приближение в уравнение (5):

$$\Delta v_x \approx -\frac{\beta}{r} v_0 \Delta x$$

и получим уравнение для первого приближения. Видно, что в этом приближении скорость линейно уменьшается со временем:

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{\beta}{r} x \right). \quad (6)$$

Это и есть пунктирная прямая на рисунке 2. Средняя скорость на участке $0x$ в этом приближении равна (штрих-пунктир на рисунке)

$$v_{xcp} = v_0 \left(1 - \frac{\beta}{2r} x \right).$$

Подставив это значение в (3), найдем уравнение баллистической кривой в первом приближении:

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\beta}{2r} x}.$$

Предположим, что из ружья вылетели две дробины радиусами r_1 и r_2 , которые пробили вертикальный лист бумаги, расположенный на расстоянии $x = l$, в точках y_1 и y_2 . Тогда из последнего соотношения получим два уравнения с двумя неизвестными, из которых найдем и начальную скорость вылета, и коэффициент сопротивления дробинок:

$$v_0 = l \sqrt{\frac{g}{2y_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1 - \sqrt{y_1/y_2}}{r_1(1/r_2 - \sqrt{y_1/y_2}/r_1)}}}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{y_1/y_2}}{\frac{l}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{\sqrt{y_1/y_2}}{r_1} \right)}.$$

Можно ограничиться этим приближением, а можно пойти дальше. Подставим первое приближение (6) в правую часть уравнения (5), найдем второе приближение для скорости, и так далее. Все эти приближения *сойдутся* (как говорят математики) к точному решению для баллистической кривой:

$$y = \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 \left(\frac{r}{2\beta x} e^{2\beta x/r} - \frac{1}{x} \right),$$

где первый сомножитель есть $y_0(x)$ (см. выражение (1)).

И тут пора начать сомневаться. Ведь даже если эти две дробинки выталкиваются одним пыжом – все равно они могут приобрести какие-то начальные вертикальные скорости. А если взять не две дробинки, а много дробинок двух сортов (с теми же радиусами r_1 и r_2), то они в процессе движения могут сталкиваться друг с другом или взаимодействовать через те возмущения, которые они производят в воздухе. И сами дробинки могут быть не строго шаровыми, что приведет к появлению «подъемной» силы (вверх или вниз) или боковых сил, или к вращению дробинки, или... И тогда мы получим

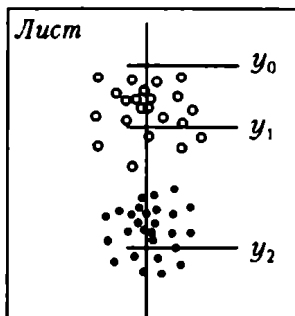


Рис. 3

на листе бумаги разброс точек, качественно показанный на рисунке 3, в котором y_1 и y_2 – это «центры тяжести» точек попадания частиц двух сортов. И, значит, траектория дробинки приобретет вероятностный смысл, а в обработке эксперимента придется использовать теорию ошибок. И тогда ...

Но это уже предмет будущих исследований наших читателей.

КАК ПОДПРЫГНУТЬ ВЫШЕ КРЫШИ

Выше носа не прыгнешь.

Устаревший
экспериментальный факт

Что значит подпрыгнуть? Это самый сложный процесс, сопровождающийся приседанием, распрямлением, отталкиванием ногами... и в конце концов приземлением – по возможности «мягким». О прыгании написано, вероятно, сотни или даже тысячи диссертаций учеными медицинских и физкультурных наук. А сколько рекордов!

У нас более скромная цель: всего лишь подпрыгнуть выше крыши; поэтому нужна простая физическая модель.

Слово «подпрыгнуть» означает, очевидно, отсутствие разбега. Предположим, мы можем в прыжке поднять свой центр масс на высоту $y_m \sim 1$ м над обычным положением (стоя). Поскольку движение происходит в постоянном поле тяготения Земли, легко найти начальную скорость (в момент отрыва):

$$v_0 = \sqrt{2gy_m} \sim 4,5 \text{ м/с}$$

и время полета (от отрыва до касания земли):

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{2y_m}{g}} \sim 1 \text{ с}.$$

Здесь мы применили хорошо известные законы для движения точечной массы с постоянным ускорением и, конечно, воспользовались очень приятным упрощающим предположением: «сопротивлением воздуха пренебречь».

Но как наш центр масс приобретает скорость v_0 ? Присев, мы затем распрямляемся в течение некоторого времени τ за счет энергетических затрат собственного организма, так что к моменту отрыва от земли наше тело массой m_0 приобретает кинетическую энергию $m_0 v_0^2 / 2$. Этот процесс можно изобразить качественно в виде штриховых линий на рисунке 1.

Опубликовано в «Кванте» №5 за 1999 год.

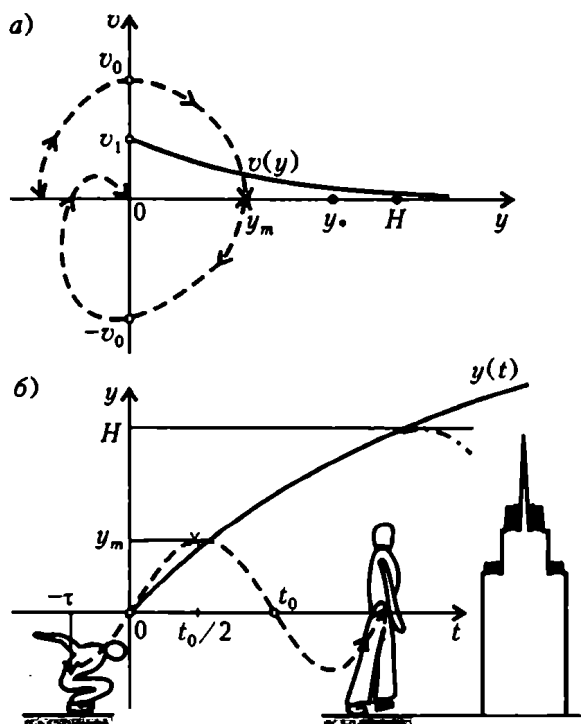


Рис. 1

Но так слишком высоко не прыгнешь. И тут приходит мысль о Винни-Пухе, который догадался использовать воздушный шарик, чтобы добраться до меда на дереве. Последуем его примеру.

Наполним шар легким газом – водородом с объемной плотностью $\rho_V = \frac{2}{29} \rho_0$, где ρ_0 – плотность воздуха. Масса газа в объеме шара равна $m_V = V \rho_V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_V$, где r – радиус шара.

Но и оболочка шара обладает какой-то массой, а именно $m_S = 4\pi r^2 \sigma$, где σ – поверхностная плотность оболочки. Поэтому теперь при распрямлении придется разгонять не только собственную массу, но еще и массу оболочки m_S , и массу водорода в оболочке m_V . И это еще не все. Оказывается, при ускорении любого тела в воздухе (любом другом газе или жидкости) приходится приводить в ускоренное движение и определенную массу окружающей среды – так называемую присоединенную массу m_* . Этот факт качественно отражен на рисунке 2: при перемещении шара вверх закращенный сверху объем воздуха

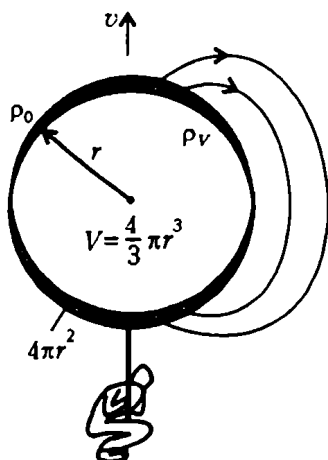


Рис. 2

должен как-то очутиться внизу. Если предположить, что наш шарик не деформируется, эта присоединенная масса оказывается в точности равной половине массы воздуха в объеме шарика: $m_a = \rho_0 V/2$.

Таким образом, желающему подпрыгнуть вместе со всем этим устройством нужно будет ускорить суммарную массу $m = m_0 + m_v + m_s + m_a$. Это явно не легче. Да еще придется преодолевать силу сопротивления воздуха шарiku, которой теперь уже никак пренебречь нельзя. Эта сила сопротивления пропорциональна площади поперечного сечения

шарика, плотности воздуха и квадрату скорости движения. Это легко устанавливается из соображений размерности, а безразмерный коэффициент пропорциональности можно измерить экспериментально. В результате получим

$$F_c = \frac{\pi}{4} \rho_0 r^2 v^2$$

(проверьте, по крайней мере, размерность). И, конечно, надо добавить еще выталкивающую силу Архимеда, равную $\rho_0 Vg$.

Итак, запишем закон движения (второй закон Ньютона) прыгуна в воздухе:

$$ma = -(m_0 + m_v + m_s)g + \rho_0 Vg - \frac{\pi}{4} \rho_0 r^2 v^2. \quad (1)$$

Но, подобно ситуации с Винни-Пухом, в состоянии покоя, когда скорость и ускорение равны нулю, сила Архимеда должна уравновешивать силу притяжения Земли, так что уравнение (1) примет вид

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_0 - \rho_v) = m_0 + 4 \pi r^2 \sigma$$

(любопытно, что при этом условии суммарная инертная масса, которая будет играть роль при ускоренном движении, становится равной $3m_a$).

Если заданы m_0 и σ , получаем кубическое уравнение для определения радиуса шара (желающий да решит его). В частности, отсюда легко найти наименьшее значение этого радиуса.

Предположим, что оболочка невесома: $\sigma = 0$. Тогда

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi(\rho_0 - \rho_V)}}.$$

Принимая массу школьника или студента (перед обедом) $m_0 = 50$ кг, а плотность воздуха $\rho_0 = 1$ кг/м³, получим $r_{\min} \approx 2,3$ м. Очевидно, что для подъема весомой оболочки придется увеличить объем шара, добавив еще легкого газа.

Если предположить, что в любом случае прыгун располагает одним и тем же запасом энергии

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2,$$

то в момент отрыва от земли будет достигнута явно меньшая скорость (см. рис.1,а):

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{m_0}{m}} < v_0.$$

И даже меньшая этой, если учесть еще и затраты энергии на преодоление сопротивления воздуха в процессе распрямления.

И вот мы оттолкнулись от земли и движемся вверх. В уравнении движения осталась только сила сопротивления воздуха:

$$ma = -\frac{\pi}{4} \rho_0 r^2 v^2. \quad (2)$$

Но что такое ускорение? Это изменение скорости со временем:

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. А что такое скорость? Это изменение перемещения со временем: $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$. Отсюда для ускорения получим выражение

$$a = v \frac{\Delta v}{\Delta y}.$$

Подставим его в уравнение (2) и сократим на v :

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = -\frac{\pi}{4} \frac{\rho_0 r^2}{m} v.$$

Можно переписать это уравнение так, чтобы обе его части стали безразмерными:

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta y}{y_*}, \quad (3)$$

где величина $y_* = \frac{4m}{\pi \rho_0 r^2}$ имеет, очевидно, размерность длины.

И очевидно, что это не случайный масштаб: он характеризует *темп* изменения скорости с расстоянием. На этом расстоянии скорость заметно изменяется – например, в два раза; точнее, в три раза; еще точнее, в 2,7 раза. Но сейчас это не столь важно. Можно проанализировать уравнение (3) и не решая его.

Прежде всего видно, что скорость убывает с высотой: об этом говорит знак «минус». Далее видно, что эта убыль скорости тем меньше, чем меньше сама скорость. Когда же скорость стремится к нулю, то и ее «приращение» (отрицательное) тоже стремится к нулю. Значит, график $v(y)$ подходит к оси y все ближе, никогда не достигая ее при любом конечном значении y (см. сплошную кривую на рисунке 1,а). Получается, что мы все время будем двигаться вверх, правда все медленнее, но нигде не останавливаясь. В итоге зависимость высоты от времени будет иметь вид сплошной кривой на рисунке 1,б.

Вспомним, однако, что плотность атмосферы уменьшается с высотой; значит, будет уменьшаться и сила Архимеда, так что рано или поздно мы вернемся на землю. Кроме того, при очень малых скоростях изменится сам закон сопротивления воздуха. Сила станет пропорциональной уже первой степени скорости и так называемой *вязкости* воздуха, которой мы до сих пор пренебрегали. Но это произойдет при скоростях движения порядка микрометров в секунду. Эта численная оценка получается в предположении абсолютно спокойной атмосферы, а так не бывает. Воздух постоянно находится в движении (горизонтальный ветер, вертикальные перемещения теплого воздуха вверх и холодного вниз – так называемая конвекция). Эти крупномасштабные движения сопровождаются мелкими завихрениями (турбулентностью), в результате чего вязкость движущегося воздуха гораздо больше, чем спокойного, и к тому же непостоянна в пространстве и во времени. Все эти явления наши вдумчивые читатели смогут учесть в дальнейшем – в своих научных работах.

А сейчас, чтобы нам уверенно вернуться вниз, надо отказаться от точного уравнивания силой Архимеда суммарной силы тяжести своего тела и шара и положить в карман хотя бы спичечный коробок или лучше бутерброд (водород горюч!). Этот небольшой перегрузок позволит кривой $v(y)$ пересечь ось y на некоторой высоте H , превосходящей заданную высоту (например, здания МГУ на Воробьевых горах); значит, начнется движение вниз (штрих-пунктирная линия на рисунке 1,б). А легкий ветерок перенесет нас через дом, реку, лес... Это уже похоже на приятный прыжок во сне. Так что прыгайте на здоровье!

КАК ГОРА СПУТНИК РОДИЛА

*...и вот, произошло великое землетрясение,
и солнце стало мрачно как власяница... и звезды
пали на землю... и небо скрылось, свившись как
свиток; и всякая гора и остров двинулись с мест
своих...*

Откровение св. Иоанна Богослова

Вулканы – интереснейшие объекты природы, величественные и грозные. Вот, например: «Кракатау – действующий вулкан в Зондском проливе, между островами Явой и Суматрой. Высота 813 м. Известен исключительным по силе извержением в августе 1883. Взрыв уничтожил более половины вулканического острова... и был слышен на расстоянии более 3 тыс. км. Огромная морская волна, возникшая при взрыве, погубила на берегах Явы и Суматры более 36 тыс. чел. Объем продуктов извержения составил около 19 км³. Выброшенный на высоту до 80 км вулканический пепел носился в воздухе несколько лет...»

Это – цитата из энциклопедии. А в одной Очень Научной Книге по космической газодинамике есть слова о возможности выброса вулканами астероидов: «Особый интерес с теоретической точки зрения представляет действие нормальных вулканических взрывов, результатом которых могут являться грандиозные катастрофические извержения типа Кракатау. Подобные взрывы не представляют собой какое-либо исключительное явление, а должны рассматриваться как закономерный результат физико-химических процессов, протекающих в недрах Земли... Высокие скорости газа при вулканических извержениях, несомненно превышающие несколько километров в секунду, объясняют большую высоту поднятия столба извержений, достигающую в ряде случаев 60 км... в некоторых случаях, когда начальная скорость выброса материала достигает 11 км/с, этот материал будет выброшен за пределы земного притяжения».

Ну, разве не заманчиво поподробнее рассмотреть процесс рождения земной горой спутника Земли или Солнца? К чему и приступим.

Предположим, что по вертикальному стволу вулкана движется случайно оторвавшаяся «пробка» базальта, лавы или чего-то еще (рис.1). Конечно же, ствол цилиндрический, а пробка шаровая. И оба имеют одинаковый радиус R . А ускоряется эта

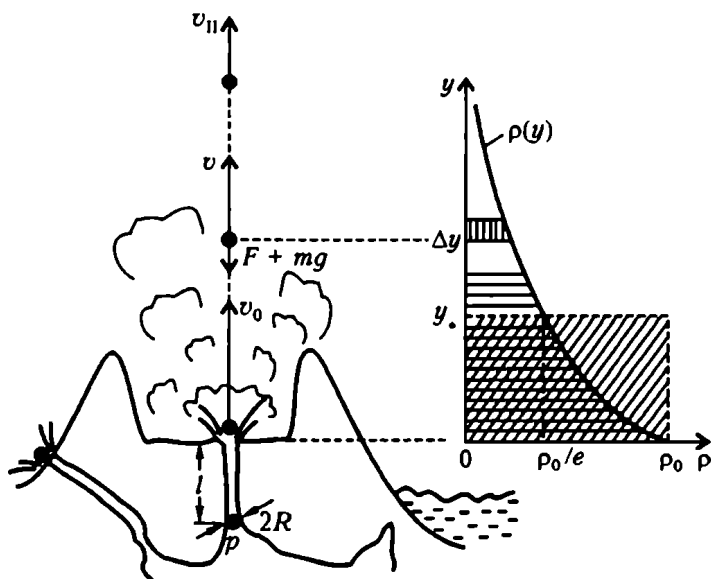


Рис. 1

пробка под действием давления p вулканических газов, намного превышающего атмосферное (по оценкам упомянутой Очень Научной Книги, давление при вулканическом взрыве порядка ста тысяч атмосфер).

По выходе из жерла вулкана эта пробка приобретет наибольшую скорость v_0 , после чего она начнет замедляться под действием сил тяготения и сопротивления атмосферы. Кстати, мы здесь не собираемся говорить привычных слов «сопротивлением воздуха пренебречь», потому что эта начальная скорость заведомо должна превосходить вторую космическую скорость

$$v_{11} = \sqrt{2gR_3} \approx 11 \text{ км/с} \quad (1)$$

(здесь R_3 – радиус Земли) и, следовательно, пробка должна двигаться с большой сверхзвуковой скоростью. Действительно, приняв скорость звука по порядку величины равной $v_{зв} =$

= 300 м/с, получим следующее значение отношения скоростей (его называют числом Маха):

$$\frac{v_0}{v_{зв}} \geq \frac{v_{11}}{v_{зв}} = \frac{11 \cdot 10^3 \text{ м/с}}{3 \cdot 10^3 \text{ м/с}} \sim 40.$$

Это уже случай *гиперзвуковых* скоростей, и конструктору летательных аппаратов даже не придет в голову пренебречь сопротивлением воздуха.

Чему же равна эта сила сопротивления? Из соображений размерностей уже не раз получали ее зависимость от плотности воздуха ρ , площади поперечного сечения движущегося тела S и скорости его движения v (проверьте, что слева и справа стоят ньютоны):

$$F = C_\rho S v^2. \quad (2)$$

А вот безразмерный коэффициент C не может быть определен при помощи размерностей – на то он и безразмерный. Но что удивительно – сам сэр Исаак Ньютон позаботился о нем: для таких гиперзвуковых движений его теоретические рассуждения дают значение $C = 1/2$.

Итак, что же происходит после «выстрела пробки» из вулкана? Ее потенциальная энергия по мере движения вверх вдоль оси y увеличивается, а кинетическая энергия уменьшается. И мы сказали бы, что их сумма остается постоянной – применили закон сохранения механической энергии, – и получили бы формулу (1). Но это в том случае, если бы эта энергия не тратилась частично на преодоление силы сопротивления воздуха. Значит, здесь мы должны записать, что изменение (убыль) суммарной механической энергии равно работе силы сопротивления F на участке пути Δy :

$$\Delta \left(\frac{mv^2}{2} + mgy \right) = -F \Delta y. \quad (3)$$

Можно показать, что кинетическая энергия тела за «пределами атмосферы» (на высоте порядка, например, 100 км, характерной для спутников Земли) много больше потенциальной. Действительно, принимая $v = v_{11}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$, $y = 10^5 \text{ м}$, получим, что $v^2/2$ превышает gy раз в двадцать (а если учесть, что начальная скорость v_0 должна превосходить v_{11} , чтобы «пробить» атмосферу, – то и больше). Таким образом, вторым слагаемым в скобках в уравнении (3) можно пренебречь в сравнении с первым с высокой точностью (ошибка – порядка нескольких процентов).

Сила сопротивления (см. выражение (2)) изменяется не только из-за изменения скорости, но также и вследствие падения плотности воздуха с высотой в соответствии с так называемой *барометрической формулой Больцмана*

$$\rho = \rho_0 e^{-y/y_*}, \quad (4)$$

где ρ_0 – значение плотности атмосферы на уровне моря (при $y = 0$), а y_* – характерная толщина атмосферы (порядка высоты Эвереста), на которой значение плотности в $e \approx 2,7$ раза меньше, чем ρ_0 . Эта зависимость изображена на рисунке 1 справа (значения $\rho(y)$ показаны горизонтальными отрезками). Видно, что плотность атмосферы Земли очень быстро (физики говорят «экспоненциально») падает с высотой.

Зависимость (4) интересна тем, что если мы захотим приравнять массу вертикального столба атмосферы переменной плотности массе столба конечной высоты, но постоянной плотности ρ_0 , то для этой высоты и получим значение y_* . Иначе говоря, площадь прямоугольника $\rho_0 y_*$, заштрихованного на рисунке косыми линиями, равна площади под кривой $\rho(y)$. Этот факт нам сейчас и пригодится.

С учетом всего сказанного уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} = -\frac{S}{m} \left(\rho_0 e^{-\frac{y}{y_*}} \Delta y \right). \quad (5)$$

Математик скажет, что это похоже на обыкновенное дифференциальное уравнение с разделенными переменными (слева только v^2 , справа – только y). А Новый Русский увидит здесь нечто от сложных банковских процентов (для кинетической энергии).

Теперь ничего не остается сделать, как решить уравнение (5). Конечно, студент первого курса Московского физико-технического института проделает эту операцию в уме. Но и школьник может тут сделать немало. Прежде всего заметим, что справа в скобках стоит элементарная площадочка, заштрихованная на рисунке 1 вертикальными линиями. Значит, по мере того как «вулканическая пробка» будет лететь вдоль оси y вверх, эти элементарные площадочки покроют всю площадь под кривой $\rho(y)$, равную $\rho_0 y_*$, как было упомянуто ранее. И где-то недалеко от поверхности Земли (атмосфера тонкая!) сила сопротивления перестанет влиять на энергию поднимающегося тела. Именно здесь телу и нужно достичь второй космической скорости, чтобы в дальнейшем выйти за пределы притяжения Земли.

А что при этом творится в левой части уравнения (5)? Здесь после интегрирования по y (прохождения толщи атмосферы) получится натуральный логарифм от v^2 , так что будем иметь

$$\ln \frac{v_{11}^2}{v_0^2} = -\rho_0 y \cdot \frac{S}{m}. \quad (6)$$

С другой стороны, начальная скорость вылета «пробки» из вулкана достигается за счет силы давления pS , действующей на массу m . Если считать давление постоянным и пренебречь трением о стенки канала, эта сила обеспечивает постоянное ускорение $a = pS/m$. Следовательно, по законам равноускоренного движения на длине канала l разгоняемое тело приобретет удельную кинетическую энергию (энергию единичной массы)

$$\frac{v_0^2}{2} = al = \frac{pS}{m} l.$$

Подставив это выражение в уравнение (6) и сделав некоторые преобразования, получим

$$\frac{v_0^2}{v_{11}^2} = \frac{2pl \frac{S}{m}}{v_{11}^2} = e^{\rho_0 y \cdot \frac{S}{m}}. \quad (7)$$

Теперь для простоты записи введем новые безразмерные (проверьте!) величины:

$$x = \rho_0 y \cdot \frac{S}{m}, \quad k = \frac{2pl}{\rho_0 y \cdot v_{11}^2}.$$

Первая из них зависит от характеристик тела: $\frac{S}{m} = \frac{\pi R^2}{4\pi R^3 \rho_s / 3} = \frac{3}{4\rho_s R}$, где ρ_s — его плотность, а

вторая — от параметров ускоряющего канала: давления p и длины l . В этих переменных уравнение (7) выглядит совсем просто:

$$kx = e^x. \quad (8)$$

Слева — уравнение прямой линии, справа — экспоненты. Обе эти линии изображены на рисунке 2. Видно, что при малых значениях k (когда, например, малы давление ускоряющих газов p или длина канала l) решения этого Последнейшего Уравнения (8) не существует: штриховая

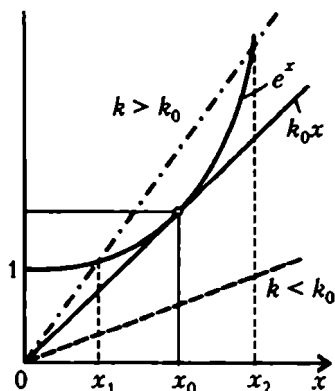


Рис. 2

прямая не пересекает экспоненту. А при некотором значении k_0 имеется единственная точка касания, для которой $x_0 = 1$, $k_0 = e$ (убедитесь подстановкой). Отсюда и найдем все интересующие нас величины:

$$\text{радиус шарового тела } R_0 = \frac{3}{4} \frac{\rho_0 y_*}{\rho_S},$$

$$\text{необходимую длину канала } l_0 = e \frac{\rho_0 y_* v_{11}^2}{2p},$$

начальную скорость выброса $v_0 = \sqrt{e} v_{11}$ ($\approx 1,65 v_{11}$), необходимую для того, чтобы выброшенное вулканом тело, «пробив» атмосферу, все еще имело бы вторую космическую скорость.

Но каковы же канал и шар? Подставив в последние формулы $\rho_0 \sim 1 \text{ кг/м}^3$, $y_* \sim 10 \text{ км} = 10^4 \text{ м}$, $\rho_S \sim 5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $p \sim 10^5 \text{ атм} = 10^{10} \text{ Н/м}^2$, получим

$$l_0 \approx 160 \text{ м}, R_0 \approx 1,5 \text{ м},$$

$$m_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_S \approx 70 \text{ т}.$$

Совсем неплохо для спутника!

Но у Последнейшего Уравнения (8) есть и другие решения. Так, при $k > k_0$ прямая (штрих-пунктир на рисунке 2) дважды пересекает экспоненту. Два корня x_1 и x_2 соответствуют тяжелому и легкому шарам (ведь $x \sim 1/R$). Первый из них может быть выброшен с меньшей скоростью (чем определенная выше v_0), второй – с большей. Это и понятно: для камня сопротивление воздуха менее существенно, чем для пушинки.

И еще. Мы рассмотрели только вертикальный выброс. Конечно, вулкан мог бы выбросить «пробку» и через наклонный ствол (см. рис.1) и, может быть, таким образом породить спутник Земли. Для этого нужна меньшая скорость, а именно – первая космическая $v_1 \approx 8 \text{ км/с}$. Желающие да рассмотрят этот случай сами.

Итак, что сказал бы осторожный физик, принимая во внимание многочисленные упрощающие предположения, сделанные нами в процессе оценок? Он сказал бы: «Если удастся обеспечить постоянное давление вулканических газов порядка 100 атмосфер на длине канала порядка 100 метров, то, пожалуй, вулкан мог бы выбросить из своего жерла тело массой порядка 100 тонн со скоростью, достаточной для того, чтобы это тело ушло на бесконечность от Земли. Если, конечно, найдется такое тело, которое выдержит ускорение в десять тысяч g ».

РЫЦАРЬ НАД ПРОПАСТЬЮ, ИЛИ НЕМНОГО О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ

*Жил на свете рыцарь бедный,
Молчаливый и простой,
С виду сумрачный и бледный,
Духом смелый и прямой.*

А.С.Пушкин

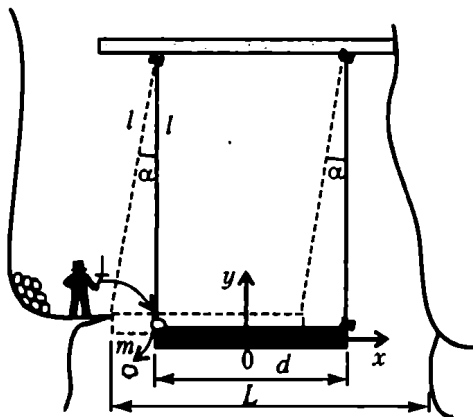
И вот однажды, надев тяжелые боевые доспехи, отправился этот Рыцарь освобождать очередной раз похищенную Принцессу. Вдруг узкая горная тропинка прервалась пропастью, над которой в самой середине висела часть «моста» на нерастяжимых нитях (рис.1). Точнее, это была платформа, до которой ни дотянуться, ни допрыгнуть, да к тому же еще и покрытая тонкой коркой скользкого льда (высокогорье!).

В крайнем огорчении схватил Рыцарь лежащий на тропе камень

Рис. 1

массой m и швырнул в мост. Горное эхо двадцать пять раз повторило звук абсолютно упругого удара, а камень низринулся в пропасть. Но — о чудо! — мост начал тихонько качаться. И тут Рыцарь сообразил, что же произошло.

При упругом ударе камня о торец тяжелой платформы и последующем отскоке горизонтальная составляющая импульса камня изменилась на $\Delta p = -2mv_x$ (рис.2). Значит, такое же приращение импульса, но противоположное по знаку, получил



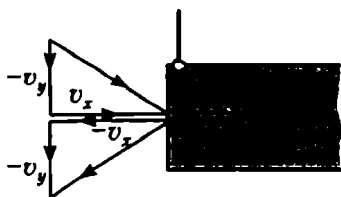


Рис. 2

и мост:

$$\Delta P = 2mv_x.$$

При этом Рыцарь учел для простоты рассуждений — ведь он торопился, — что масса платформы много больше массы камня; а у кого есть время, тот может посчитать точнее, учитывая, что камень отражается от уже начавшей двигаться платформы. Итак, после первого броска платформа получила приращение скорости

$$\Delta V = \frac{\Delta P}{M}$$

и стала потихоньку качаться почти без затухания.

Рыцарь решил изобразить на пыльной тропинке этот процесс. Он нарисовал плоскую систему координат скорость — смещение (V, x). (Позднее эту плоскость называли *фазовой*.) До первого удара платформа находилась в начале этой системы координат, в точке 0 (рис.3). В момент удара она получила

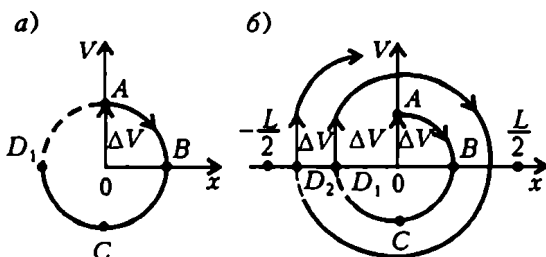


Рис. 3

приращение скорости ΔV (см. вертикальную стрелку и точку A на рисунке 3, a), значит ей была сообщена начальная кинетическая энергия. И платформа начала двигаться в сторону положительных значений x . Но поскольку тросы, на которых подвешена платформа, нерастяжимы, центр масс платформы движется по окружности и, следовательно, поднимается в поле тяготения. При этом кинетическая энергия переходит в потенциальную, так что в точке B скорость становится равной нулю при максимальном отклонении от положения равновесия. После этого платформа начинает двигаться в сторону Рыцаря, достигая в точке C максимальной скорости, и на мгновение останавливается в точке D_1 . Если нет затухания, этот процесс повторяется вечно.

Из рисунка Рыцарю стало ясно, что имеет смысл в точке D_1 бросить еще один камень. При этом, совершив еще одно качание, платформа окажется в точке D_2 (см. рисунок 3,б) — и так будет продолжаться, пока точка D_N не совпадет с координатой $x = -L/2$. И Рыцарь без колебаний решил оценить, сколько бросков нужно сделать, чтобы край скользкой платформы подошел вплотную к краю пропасти и можно было бы осторожно ступить на платформу.

Он взял свой пыльный щит и написал на нем закон сохранения энергии:

$$M \frac{V_{\max}^2}{2} = Mgl(1 - \cos \alpha_{\max}),$$

где V_{\max} — максимальная скорость платформы (очевидно, когда она в своем качании проходит нижнюю точку), а α_{\max} — максимальный угол отклонения, который, как легко видеть из рисунка 1, находится из прямоугольного треугольника:

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{L - d}{2l}.$$

При этом угле скорость платформы равна нулю: вся кинетическая энергия перешла в потенциальную. Считая, что при каждом ударе камня о платформу (когда она останавливается на мгновение в точке, ближайшей к Рыцарю) последняя получает один и тот же импульс, можно найти требуемое число ударов из условия

$$V_{\max} = N \Delta V = N \frac{\Delta P}{M} = N \frac{2mv_x}{M}.$$

Подставив все это в закон сохранения энергии, Рыцарь получил

$$\frac{1}{2} \left(\frac{N \cdot 2mv_x}{M} \right)^2 = gl \left(1 - \frac{L - d}{2l} \right),$$

откуда

$$N = \frac{M}{2mv_x} \sqrt{g(2l - L + d)}.$$

Теперь нужно сделать численные оценки. Подставив в формулу массу платформы $M = 10^3$ кг, массу камня $m = 1$ кг, горизонтальную составляющую скорости камня в момент удара $v_x = 10$ м/с, ширину пропасти $L = 50$ м, длину платформы $d = 30$ м, длину подвеса $l = 50$ м, он нашел число бросаний камня:

$$N = 1,4 \cdot 10^3.$$

А сколько времени Рыцарю придется трудиться? Число колебаний платформы известно, осталось узнать их период. Он зависит, конечно, от длины маятника l (м) и от ускорения поля тяготения g (м/с²). Из этих двух величин можно составить единственную формулу, дающую нужную нам размерность периода (с):

$$\sqrt{\frac{l(\text{м})}{g(\text{м/с}^2)}} \sim T(\text{с}).$$

И Рыцарь вспомнил также, что еще в XV веке дедушка говорил ему: «Помни, что когда речь идет о колебаниях, то, я не знаю почему, всегда появляется 2π ».

Итак, период колебаний платформы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{50 \text{ м}}{10 \text{ м/с}^2}} = 14 \text{ с}.$$

Поскольку T есть одновременно и время между ударами камней, то стало ясно, что трудиться придется не менее чем

$$t = 14 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 5,5 \text{ ч}.$$

(Хорошо еще, что можно пренебречь затуханием!) Труд не малый, но впереди — Принцесса.

И Рыцарь смело взялся за дело.

КАК СТУДЕНТ НА СВЕРХЗВУК ВЫХОДИЛ

Не делай ничего наугад, а только по правилам искусства.

Марк Аврелий

В ночь перед экзаменом по аэродинамике приснился Студенту страшный сон – будто, падая с кровати, достиг он сверхзвуковой скорости. Вскочив в холодном поту, задумался Студент: в самом деле, с какой высоты нужно упасть, чтобы достичь сверхзвука в атмосфере Земли? Вопрос не праздный – ведь так можно было бы обойтись без аэродинамических труб, требующих большой мощности для разгона воздуха! И еще преимущество: поток воздуха в аэродинамической трубе неизбежно турбулентный (возмущенный), а в атмосфере турбулентность естественная, может быть, как раз такая, как в реальном полете. И еще важное соображение: исследуемое тело, например самолет или его модель, может быть любых размеров, в отличие от (поневоле) малых размеров в трубе. И еще...

Но и перечисленных прелестей казалось достаточно, чтобы Студент с воодушевлением взялся за физические оценки.

Еще в школе он знал, что тело, сброшенное с высоты l , достигает (в вакууме) скорости (рис.1, слева)

$$v_0 = \sqrt{2gl} . \quad (1)$$

Значит, чтобы достичь скорости порядка 330 м/с, высота должна быть равна

$$l = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(3,3 \cdot 10^2)^2}{2 \cdot 10} \text{ м} \approx 5 \text{ км} .$$

(Конечно, не обязательно падать вертикально: можно, привязав тело к нити длиной l , достичь той же скорости в нижней точке колебаний. Что гораздо лучше: опыт будет снова и снова повторяться, пока продолжаются колебания, – в отличие от одноразового падения вниз.)

Но в вакууме никакого звука нет – значит, нет и понятия сверхзвукового движения. А воздух будет оказывать сопротивление движению, и качественно ясно, что начальная высота,

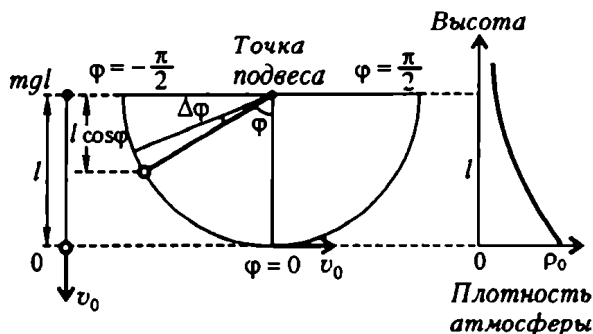


Рис. 1

падая с которой тело может достичь сверхзвуковой скорости, должна быть больше полученной выше оценки. И, значит, на таких масштабах плотность атмосферы ρ уже не придется считать постоянной величиной (см. рис.1, справа) – об этом отлично знают альпинисты.

Силу сопротивления можно описать, исходя из соображений размерностей:

$$F = C \frac{\rho v^2}{2} S. \quad (2)$$

Здесь $\rho v^2/2$ – так называемый скоростной напор (он имеет размерность давления), S – характерная площадь тела, например его лобового сечения. А вот C – это безразмерный коэффициент сопротивления, который теория размерностей, естественно, «не чувствует». Ради его измерения и построены во всем мире мощные аэродинамические трубы, и ради него Студент и задумался.

Так возник Проект Экспериментальной Установки.

Возьмем невесомую нерастяжимую нить длиной l , подвесим на ней сверхзвуковой авиалайнер (например, ТУ-144) или истребитель массой m и, приведя этот «математический маятник» в горизонтальное положение, отпустим (см. рис.1, в центре). Потенциальная энергия самолета в любой точке его траектории, характеризуемой углом φ , равна

$$mgl(1 - \cos \varphi).$$

Проверим: в начальной точке, когда $\varphi = -\pi/2$, $\cos \varphi = 0$ и эта

энергия равна $mg l$, а при $\varphi = 0$ (в самой нижней точке траектории) она равна нулю.

Не будь потеря энергии на сопротивление, суммарная механическая энергия сохранялась бы (собственно, из этого условия и найдена скорость v_0 в формуле (1):

$$m \left(\frac{v^2}{2} + g l (1 - \cos \varphi) \right) = m g l. \quad (3)$$

Но если есть сила сопротивления, то суммарная механическая энергия колеблющегося тела будет убывать. Работа силы сопротивления на небольшом участке пути длиной $l \Delta \varphi$ равна, очевидно, $F l \Delta \varphi$. Значит, учитывая выражения (2) и (3), можно записать

$$\Delta \left(\frac{v^2}{2} + g l (1 - \cos \varphi) \right) = - \frac{v^2}{2} \left(C \frac{\rho S l}{m} \right) \Delta \varphi. \quad (4)$$

Обозначим набор величин в правой части в скобках одной буквой:

$$\beta = \frac{C \rho S l}{m}.$$

Вообще говоря, это не постоянная. Действительно, первая же оценка по формуле (1) показала, что проектируемое устройство будет циклопическим сооружением, поэтому плотность воздуха ρ будет заметно изменяться на таких масштабах. Да и безразмерный коэффициент сопротивления C не постоянен, а зависит от отношения скорости движения тела к скорости звука $v_{зв}$, т.е. от числа Маха $M = v/v_{зв}$. Вблизи $M = 1$ он резко возрастает (рис. 2), а затем уменьшается с ростом M (для чего и делаются стреловидные крылья у сверхзвуковых самолетов). Конечно, все это можно учесть в правой части уравнения (4) и, решая его, например численно на компьютере, сравнить результаты теории и эксперимента, из чего и будет получена информация об искомом коэффициенте сопротивления.

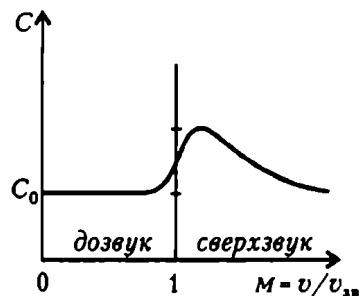


Рис. 2

Но Студент сделал проще. Чтобы оценить все-таки длину подвеса, при которой лайнер заведомо достигнет скорости звука,

он сделал *Оценку Сверху*, или, как изящно выражаются математики, мажорировал. Для этого он выбрал для плотности самое большое значение $\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$ (у поверхности Земли), для коэффициента сопротивления взял максимальное значение (приблизительно вдвое большее, чем при дозвуковых скоростях) $C = 2C_0$, а скорость в выражении для работы силы сопротивления решил мажорировать ее значением для случая вакуума, которое получается из выражения (3):

$$(v^0)^2 = 2gl \cos \varphi = v_0^2 \cos \varphi.$$

Итак, в формуле (4) справа стоит убыль механической энергии, заведомо большая (по модулю), чем в реальности, но

зато теперь можно проще узнать, сколько будет «съедено» энергии, например, на участке траектории от верхней точки ($\varphi = -\pi/2$) до нижней ($\varphi = 0$). Для этого надо сложить все потери энергии на каждом малом $\Delta\varphi$, или, как говорят взрослые, проинтегрировать функцию

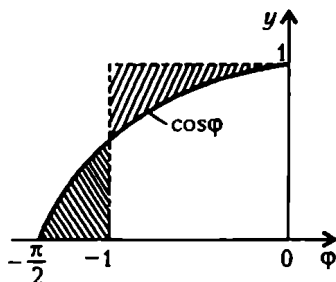


Рис. 3

$$-\beta_{\max} \frac{v_0^2}{2} \cos \varphi,$$

где, по договору, $\beta_{\max} = 2C_0\rho_0 Sl/m$. При этом придется найти площадь под кривой $y = \cos \varphi$ (рис.3). Кто умеет, да возьмет интеграл:

$$\int_{-\pi/2}^0 \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^0 = 0 - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

А кто не умеет, и так поймет, взглянув на рисунок 3, что эта площадь порядка единицы (там для наглядности заштрихованы участки одинаковой площади).

Теперь изменение суммарной механической энергии можно записать так:

$$\left(\frac{v^2}{2} + gl(1 - \cos 0) \right) - \left(0 + gl \left(1 - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = -\beta_{\max} gl \cdot 1.$$

Потребуем, чтобы скорость тела в нижней точке ($\varphi = 0$) стала равной скорости звука: $v = v_{\text{зв}}$, и учтем, что $\cos 0 = 1$, а $\cos -\pi/2 =$

= 0. Тогда

$$\left(\frac{v_{zv}^2}{2} + 0 \right) - (0 + gl) = -\beta_{\max} gl .$$

В результате получим квадратное уравнение для искомой длины l :

$$v_{zv}^2 = 2g(1 - \beta_{\max})l = 2g\left(1 - \frac{2C_0\rho_0 Sl}{m}\right)l .$$

Подставляя характерные значения величин для «типичных» сверхзвуковых истребителей: $m = 30$ т, $S = 50$ м², $C_0 = 0,01$, найдем

$$l_1 \approx 7 \text{ км и } l_2 \approx 20 \text{ км} .$$

Даже меньший из этих двух корней сравним с высотой самых высоких гор на Земле.

И еще одна мысль пронзила Студента: центробежная сила инерции!? Ведь вблизи нижней точки центростремительное ускорение будет равно

$$\frac{v_{zv}^2}{l} \approx 1,5g ,$$

значит, перегрузка составит $2,5g$ – лайнер «потяжелеет», и это надо учесть при выборе троса.

Таким образом, если пропилить в самой высокой горе пропасть с вертикальными стенками шириной в несколько размахов крыла, затем наверху установить горизонтальную ось вращения, подвесить лайнер на тросе длиной семь километров... – работы хватит всем и надолго. А кстати, где можно достать тонкую (желательно нерастяжимую) нить длиной несколько километров, способную выдержать вес нескольких авиалайнеров?

С этими мыслями Студент и пошел на экзамен по экспериментальной аэродинамике. Результат экзамена в летописях не сохранился...

УЖАСЫ РЕЗОНАНСА

«Глас вопиющего в пустыне: приготовьте путь Господу, прямым сделайте в степи стези Богу нашему; всякий дол да наполнится, и всякая гора и холм да понизятся, кривизны выпрямятся, и неровные пути сделаются гладкими» (Исаия 40:3,4). Ну, разве не похоже это на призыв сделать грандиозный аэродром для горизонтального приземления летательного аппарата? И все-таки, как бы ни старались строители, абсолютно ровной взлетно-посадочной полосы сделать не удастся. Она всегда получается слегка волнистой. Значит, при быстром движении по ней летательный аппарат может «подпрыгивать». Вот эту ситуацию и рассмотрим.

Пусть летательный аппарат массой m (и, значит, силой тяжести mg) движется с постоянной скоростью v на двух

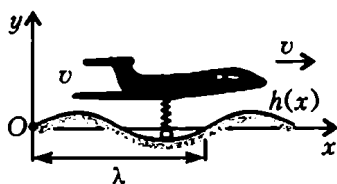


Рис. 1

колесах, которые не отрываются от твердого покрытия (рис.1). Пусть каждое колесо снабжено пружиной жесткостью k , которая в недеформированном состоянии имеет длину H . Если в данный момент времени положение центра масс системы над горизонталью Ox определяется ординатой y , а высота неровности дороги h , то деформация пружины равна $\Delta y = y - H - h$. Тогда вдоль пружины возникает упругая сила

$$F = -k\Delta y = -k(y - H - h).$$

Здесь знак «минус» указывает на то, что направление силы упругости, действующей на летательный аппарат, противоположно знаку деформации пружины Δy : если пружина растянута, сила направлена вниз, если сжата – вверх; поэтому она является *возвращающей* (в положение равновесия) силой.

Запишем уравнение второго закона Ньютона, описывающего движение экипажа в вертикальном направлении (в проекциях на

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1997 год.

это направление):

$$ma_y = -mg + 2F.$$

(Двойка в правой части учитывает, что колеса-то два.) Подставим сюда выражение для упругой силы:

$$ma_y = -mg - 2k(y - H - h).$$

Тут сразу виден частный случай равновесия, когда экипаж стоит себе без движения на дороге (пусть, для простоты, в этой точке $h = 0$). Тогда его ускорение $a_y = 0$, и из последнего уравнения получаем статическую деформацию пружины:

$$y_0 - H = -\frac{mg}{2k}.$$

Вполне понятно, почему она отрицательна: пружина ведь сжата.

Далее удобно будет отсчитывать вертикальное перемещение центра масс аппарата относительно найденного положения равновесия $y_0 = H - mg/(2k)$. Для этого введем смещение относительно положения равновесия:

$$Y = y - y_0.$$

Тогда уравнение движения упростится (мы заодно разделим обе части на массу m) и примет вид

$$a_y = -\frac{2k}{m}(Y - h).$$

Сделаем еще несколько преобразований.

1) Учтем, что ускорение является второй производной от перемещения по времени:

$$a_y = Y''.$$

2) Примем, что неровность посадочной полосы есть гармоническая функция с пространственным (вдоль x) периодом λ (длиной волны) и амплитудой h_0 :

$$h = h_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right).$$

3) Вспомним, что при постоянной горизонтальной скорости

$$x = vt.$$

4) Обозначим набор положительных величин так:

$$\frac{2k}{m} = \omega_0^2.$$

Теперь уравнение движения можно записать в виде

$$Y'' + \omega_0^2 Y = \omega_0^2 h_0 \sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right).$$

Если бы в правой части последнего уравнения стоял ноль, то всякий здравомыслящий читатель узнал бы в нем уравнение свободных гармонических колебаний с частотой $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$. Но у нас справа не ноль, а гармоническая функция с амплитудой $\omega_0^2 h_0$ и периодом $T = \lambda/v$, или частотой $\Omega = 2\pi/T = 2\pi v/\lambda$, которые задаются внешними условиями – длиной волны λ и максимальным «размахом» неровностей h_0 . Поэтому возникающие колебания называются *вынужденными*.

Найдем отклик колебательной системы (движущегося аппарата с двумя пружинами) на внешнее возмущение, вызванное неровностями дороги. Будем искать решение в виде тоже гармонических колебаний с частотой *вынуждающей* силы Ω :

$$Y = Y_0 \sin \Omega t.$$

После двукратного дифференцирования ($Y'' = -\Omega^2 Y_0 \sin \Omega t$), подстановки в уравнение движения и сокращения на $\sin \Omega t$ получим уравнение для искомой амплитуды Y_0 :

$$Y_0 (-\Omega^2 + \omega_0^2) = \omega_0^2 h_0.$$

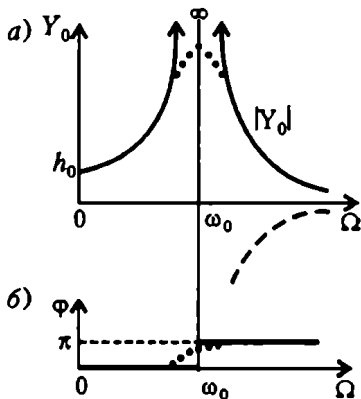


Рис. 2

На рисунке 2,а качественно изображена зависимость амплитуды колебаний Y_0 от частоты внешнего возбуждения Ω . Видно, что если Ω стремится к нулю (когда скорость движения мала или аэродром ровен, т.е. $\lambda \rightarrow \infty$), то Y_0 стремится к h_0 . Это понятно: при малой скорости движения или очень большой длине волны неровностей движущийся аппарат просто отслеживает их профиль.

Но если длина волны неровностей аэродрома и скорость движения окажутся такими, что вынужденная частота $\Omega = 2\pi v/\lambda$ совпадет с собственной частотой $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$, произойдет нечто ужасное: амплитуда колебаний станет неограниченно большой ($Y_0 \rightarrow \infty$) и может произойти разрушение системы. Это так называемый случай *резонанса*.

далее, если $\omega > \omega_0$, то значение Y_0 становится отрицательным (см. штриховую кривую на рисунке 2,а), но знак «минус» можно спрятать в аргумент синуса:

$$-|Y_0| \sin \Omega t = |Y_0| \sin (\Omega t + \pi).$$

Иными словами можно сказать, что фаза колебаний φ изменяется на π в окрестности частоты вынуждающей силы $\Omega = \omega_0$ (рис. 2,б).

Конечно, инженеры и ученые делают все, чтобы избежать ужасов резонанса (т.е. $|Y_0| \rightarrow \infty$). Прежде всего, можно ввести в колебательную систему так называемое демпфирование (если не хватает всегда присутствующего стока энергии – трения) – например, цилиндр с маслом и поршнем, соединенным с пружиной. Тогда в уравнение движения нужно будет ввести соответствующую диссипативную силу (приводящую к диссипации механической энергии, т.е. ее рассеянию, переходу в тепло), и $|Y_0|$ не будет уходить в бесконечность (см. точечную кривую на рисунке 2). Далее, волнистость аэродрома совсем не обязательно описывается единственной гармонической функцией (с постоянной длиной волны λ). Наконец, кто же ездит по аэродрому с постоянной скоростью? Любой летательный аппарат стремится поскорее или разогнаться перед взлетом, или затормозиться при посадке.

А вот для наземных экипажей (например, железнодорожного вагона) и λ – длина рельса, и v – скорость движения постоянны, и вы можете почувствовать наступление резонанса: вагон начинает галопировать, либо прыгая строго вертикально, либо совершая вращательные («клюющие») движения вокруг поперечной горизонтальной оси (дифферент) или вокруг продольной горизонтальной оси (боковая качка).

Но у вагона много колес и пружин, так что его движение описывается гораздо сложнее, чем рассмотренный нами случай.

КЛАДОВЫЕ ЭНЕРГИИ МОЛЕКУЛЫ

Да неужто у молекулы, такой маленькой, могут быть еще и кладовые? ! А вот есть же. Они даже специальное название имеют: *внутренние степени свободы*. Но прежде всего напомним, что такое степень свободы.

Положение в пространстве маленького тела, например атома (или материальной точки как математического предела маленького шарика), можно задать при помощи трех чисел x , y и z (рис.1,а). Этот атом можно переместить вдоль любой из трех осей независимо от двух других. Физики говорят, что у такого тела три степени свободы: $i = 3$. В комнатных условиях физичес-

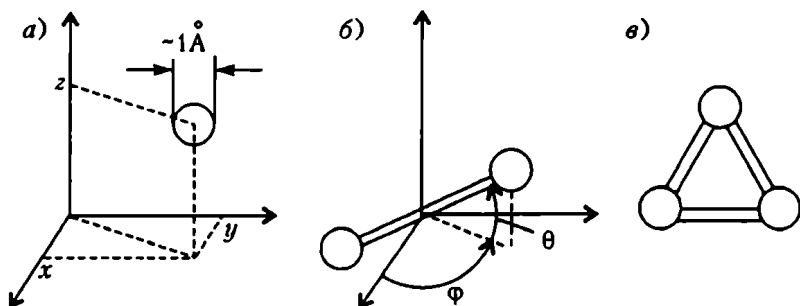


Рис. 1

ким образом такого шарика может служить атом благородного газа (гелия, неона, аргона, криптона, ксенона, радона).

Соединив две материальные точки жестким невесомым стержнем, получим нечто вроде гантели (рис.1,б). Для полного описания ее положения в пространстве нужны уже не только три числа x , y , z (которые теперь будут характеризовать положение центра масс гантели), но еще и два угла φ и θ (в географии они называются долготой и широтой). Итак, как говорят герои «Приключений Буратино», три плюс два – сколько? – правильно, – пять степеней свободы: $i = 5$. А можно сказать и так:

Опубликовано в «Кванте» №5 за 1995 год.

поскольку шариков два, то, будь они независимы друг от друга, для описания их положения в трехмерном пространстве потребовалось бы $3 \times 2 = 6$ чисел, но у них есть одна жесткая связь, так что в этом случае $i = 3 \times 2 - 1 = 5$.

Похоже, мы готовы нащупать некую общую формулу: $i = 3 \times N - S$, где N – число материальных точек, S – число связей между ними.

Сделаем еще шаг – пусть есть три атома: $N = 3$, и они соединены тремя жесткими связями: $S = 3$ (рис.1,а). Тогда получим $i = 3 \times 3 - 3 = 6$. Действительно, в таком случае для описания положения этого треугольника в трехмерном пространстве нужен еще один угол – например, угол поворота плоскости треугольника относительно линии, соединяющей какую-нибудь пару атомов. Похоже, наша формула верна.

Теперь попробуем описать движение этих простых жестких молекул. Рассмотрим, например, гантельку, центр масс которой C движется вдоль оси x со скоростью v_c , а сама гантельки длиной l вращается в плоскости xz с постоянной угловой скоростью Ω (рис.2,а). Угол θ при этом пропорционален времени: $\theta = \Omega t$ (в начальный момент времени $\theta = 0$ – гантелька расположена вдоль оси x). Тогда для обоих атомов имеем

$$x_{1,2} = v_c t \pm \frac{l}{2} \cos \Omega t, \quad y_{1,2} = 0,$$

$$z_{1,2} = \pm \frac{l}{2} \sin \Omega t.$$

На рисунке 2,б показано изменение со временем только координат x обоих атомов и центра масс гантельки. Понятно, что в точках пересечения всех трех кривых гантелька расположена вдоль оси z .

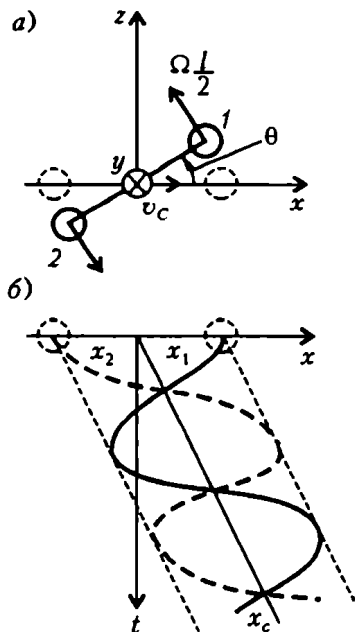


Рис. 2

А почему гантельки обязательно жесткие? Представим себе, что два шарика (атома) массой m соединены пружинкой жесткостью K и могут скользить вдоль невесомого жесткого стержня (рис.3,а). В положении равновесия расстояние между ними l . Растянем пружинку так, чтобы каждый шарик отклонился от

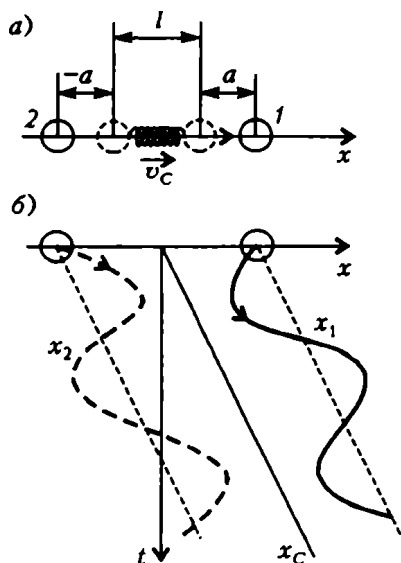


Рис. 3

своего положения равновесия на величину $\pm a$, и отпустим. Пусть при этом центр масс гантели движется со скоростью v_c вдоль оси x , а вращения нет. Тогда положение обоих шариков на оси x можно описать выражением

$$x_{1,2} = v_c t \pm \left(\frac{l}{2} + a \right) \cos \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{m/(2K)}$ — частота колебаний, и представить графически на рисунке 3,б. (А теперь вообразите, что есть еще и вращение, и попробуйте сами нарисовать суммарное движение шариков.)

В комнатных условиях молекулы основных компонен-

тов воздуха — азота N_2 и кислорода O_2 — похожи на жесткие гантели. Но с нагреванием газа в каждой молекуле возникают колебания атомов относительно центра масс. Говорят, что *возбуждаются* колебательные степени свободы. При дальнейшем увеличении температуры эти колебания могут стать столь интенсивными, что молекула развалится на атомы — произойдет ее *диссоциация*. Каждый образовавшийся атом-шарик (материальная точка) вновь будет иметь три степени свободы, но надо помнить, что атомов стало вдвое больше.

И еще надо помнить, что атом никакая не точка: это — многоэтажный дом, заселенный электронами, живущими в правовом обществе по законам квантовой механики. Эти электроны при столкновениях атомов могут забрасываться на верхние этажи (возбуждаются электронные степени свободы) или сбрасываться вниз, что сопровождается электромагнитным излучением. В очень важном частном случае — когда у атомов есть так называемый метастабильный уровень, на котором электроны могут «подождать» и «пожить» дольше, чем на обычном уровне, — можно создать... лазер. В лазере все электроны, как по команде, прыгают вниз, излучая мощную электромагнитную волну.

Это напоминает веселую задачу «Геофизическое «оружие» из «Физического фейерверка» (М.: Мир, 1979, с. 163): «Китайская

Народная Республика, возможно, обладает новым устрашающим видом оружия – геофизическим. Некоторые специалисты считают, что если все население Китая ... одновременно прыгнет с двухметровых платформ, то в земле начнет распространяться ударная волна. Прыгая снова всякий раз, как эта волна будет проходить через Китай (каждые 53–54 мин), китайцы могут усилить ее до такой степени, что она может разрушить отдельные районы Соединенных Штатов, особенно в Калифорнии, нередко и сейчас страдающие от землетрясений».

Но что это мы все об электронах? Вернемся к молекулам, как было обещано в заглавии статьи. Пусть молекула из N атомов с S связями обладает числом степеней свободы i . Сюда входят три поступательные, или трансляционные, степени свободы $i_t = 3$, две или три вращательные и др. Какая нужна энергия, чтобы нагреть газ до температуры T ? Вспомним, что температура связана со средней энергией (приходящейся на одну молекулу) только поступательных степеней свободы молекулы:

$$E_{\text{ср}} = \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} = \frac{3}{2} kT = \frac{i_t}{2} kT ,$$

где k – постоянная Больцмана. В этой записи учтен так называемый *принцип равнораспределения* энергии по степеням свободы: на каждую поступательную степень свободы при термодинамическом равновесии приходится в среднем энергия $kT/2$. Этот принцип иногда называют теоремой, иногда законом, иногда постулатом о равнораспределении энергии по степеням свободы. Важно не название. Важно другое – что он распространяется не только на поступательные, но и на любые степени свободы молекулы. Это означает, что для нагревания до температуры T газа, молекулы которого обладают при этой температуре i степенями свободы, нужно каждую из них «накормить» энергией $kT/2$. Так что в результате потребуется в среднем, в расчете на одну молекулу, энергия

$$E_i = \frac{1}{2} i kT ;$$

в расчете на один моль, содержащий число молекул, равное постоянной Авогадро N_A , –

$$E_N = E_i N_A = \frac{1}{2} i k N_A T = \frac{1}{2} i R T ,$$

где R – универсальная газовая постоянная; в расчете на один

килограмм –

$$E = \frac{E_N}{M} = \frac{1}{2} i \frac{R}{M} T,$$

где M – молярная масса. Напомним, что множитель при T называется среднемолекулярной, молярной или удельной теплоемкостью соответственно.

Вернемся к колебательному движению молекул. Сколько степеней свободы соответствуют колебаниям вдоль одной линии? Оказывается, две: нужно знать не только положение относительно равновесия, но и скорость. С точки зрения энергии: одинаковый вклад ($kT/2$) дает как средняя кинетическая энергия атомов, так и средняя потенциальная энергия их взаимодействия. Таким образом, если для жесткой гантели $i = 5$, то в случае замены жесткого стерженька одномерной пружинкой $i = 7$.

А почему, – спросит вдумчивый читатель, – для описания, например, вращательного движения вокруг одной оси достаточно одной степени свободы? Ведь можно было бы потребовать задать и угол, и угловую скорость?!

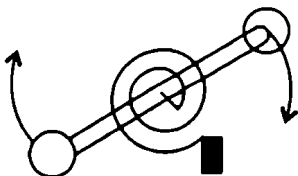


Рис. 4

Да, так оно и было бы, если бы мы на ось жесткой вращающейся молекулы-гантели надели спиральную пружинку (рис. 4). Тогда при ее закручивании на некоторый угол появилась бы,

помимо кинетической энергии шариков гантели, еще и потенциальная энергия закрученной пружинки. Так что для достижения термодинамического равновесия пришлось бы «отвесить» не только $kT/2$ на среднюю кинетическую энергию молекулы, но и еще $kT/2$ на среднюю потенциальную энергию. А пока этой спиральной пружинки нет, одна вращательная степень свободы удовлетворяется одним $kT/2$.

Кстати, стрелки многих измерительных приборов как раз и похожи на то, что показано на рисунке 4. Они могут вращаться вокруг оси, а к положению равновесия их возвращает пружинка. Чем легче стрелка, тем чувствительнее прибор, что есть хорошо. Но если массу стрелки сделать близкой к массе молекул окружающей среды, то под действием ударов этих молекул прибор перестанет «работать»: стрелка будет участвовать в хаотическом тепловом движении. Это и будет тепловой предел измерений.

Строго говоря, любой предмет – стол, паровоз – находится в состоянии хаотического движения, точнее – центр масс этого предмета мечется во все стороны, согласно закону равномерного

деления. Средняя квадратичная поступательная скорость v этого движения найдется из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

но так как масса тела велика, то скорость этого хаотического метания очень мала (оцените сами). Поэтому паровозы и не сходят с рельсов из-за теплового движения, а столы стоят на месте почти неподвижно.

Но мы не напрасно сказали выше слова «молекулы которого обладают при данной температуре i степенями свободы». Они подчеркивают, что при рассматриваемой температуре могут быть «включены» не все степени свободы молекулы. Так, при низких температурах молекулы летают как точки-шарики: их средняя энергия равна $3kT/2$, «включены» только 3 трансляционные степени свободы, а остальные $i - 3$ степени свободы – это кладовые, закрытые для насыщения их энергией. Молекулы при этом не только не колеблются, но и не вращаются, даже если они похожи на тантельки.

Это – чисто квантово-механический эффект (о чем приятно вспомнить на страницах «Кванта»). Оказывается, даже вращательная энергия квантуется: она не может быть меньше некоторой порции. Поэтому, если температура низка, эта минимальная порция еще не обеспечена, и вращения нет. Например, для молекулярного водорода H_2 вращение включается при температуре $T \sim 100$ К, при $T \sim 1000$ К включаются колебания и т.д., так что температурные зависимости числа степеней свободы и энергии имеют вид ломаных (рис.5). Конечно, в реальности эти изломы сглажены за счет разброса, или распределения, молекул по скоростям – см. штриховые линии на рисунке.

Но нужны ли нам все эти степени свободы молекул? Очень даже нужны – и не только из любви к свободе. Ведь мы нагреваем газ и наполняем кладовые энергии молекул теплотой не бесцельно: мы собираемся потом получить от газа работу (в паровой машине, двигателе внутреннего сгорания) или импульс (когда

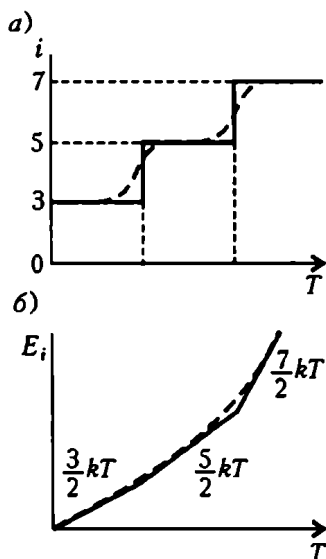


Рис. 5

выбрасываем газ из сопла ракеты). И вот тут-то есть надежда, что газ вернет нам в виде желанного полезного эффекта тем больше «проглоченной» тепловой энергии, чем больше степеней свободы у его молекул.

Увы, только надежда. Оказывается, в процессе расширения, т.е. совершения работы, начинает сказываться тот факт, что для достижения термодинамически равновесного состояния при изменяющейся со временем температуре $T(t)$ для разных степеней свободы нужно неодинаковое число столкновений молекул друг с другом (а иначе – не сталкиваясь – как они узнают, что существуют другие молекулы и что температура газа-хаоса изменяется?). Больше всего столкновений требуется для колебательных степеней свободы. Поэтому газ может так быстро проскочить, например, сопло ракеты, охлаждаясь при этом и ускоряясь (мы и стремимся его разогнать как можно быстрее), что не все внутренние степени свободы успеют отдать свою энергию. В результате ускоренный газ, выброшенный в космос, будет холодным с точки зрения поступательных степеней свободы, но горячим с точки зрения внутренних степеней: из-за сильного разрежения молекулы почти перестанут сталкиваться, а их атомы будут яростно колебаться, храня память о высокой температуре где-то внутри двигателя. Возникает многотемпературная термодинамически неравновесная среда, в которой

$$T_{\text{колеб}} \neq T_{\text{вращ}} \neq T.$$

Это одна из интереснейших и важнейших задач физической газодинамики, которую можно изучить, например, на факультете аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института. Чего вам и желаем.

ЕЩЕ ОДИН ВЕЧНЫЙ ДВИГАТЕЛЬ?

Первые проекты механического вечного двигателя относятся к 13 веку (Виллар де Оннекур, 1245, Пьер де Марикур, 1269, Франция) ... С 1775 года Парижская Академия наук отказалась рассматривать проекты вечного двигателя.

Физический энциклопедический
словарь

Проекты вечных двигателей запрещено рассматривать, чтобы не тратить напрасно время. Но иногда полезно порассуждать и понять, действительно ли некую машину можно отнести к классу запретных «вечных двигателей».

Так вот, один вдумчивый школьник слышал, что молекулы при столкновении со стенкой могут терять определенную часть импульса, а в предельных случаях — отражаться абсолютно упруго (изменяя скорость нормального удара на противоположную без изменения модуля) или неупруго (полностью теряя эту скорость и «соскальзывая» уже вдоль поверхности). И тут его осенило.

Он решил приобрести пластинку, одна сторона которой отражает молекулы абсолютно упруго, а другая — неупруго, и, вырезав из нее два одинаковых по площади диска, насадить их на стержень (конечно, невесомый), предварительно развернув на 180° их плоскости относительно друг друга, а затем этот стержень укрепить на вертикальной оси, конечно, без трения. И он даже нарисовал это устройство (рис.1, вид сверху). На этом рисунке он обозначил и площадь дисков: S , и среднюю тепловую скорость молекул газа: v , и линейную (окружную) скорость дисков: u в данное мгновение, а изогнутой стрелкой показал ожидаемое направление вращения

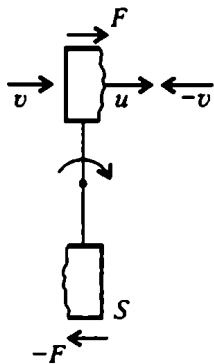


Рис. 1

всего устройства. При этом он принял, что левая поверхность верхнего диска отражает молекулы упруго, а правая – неупруго.

Разумеется, школьник понимал, что молекулы газа движутся равновероятно во всех направлениях, но рисовать их все он не стал, ибо его интересовали только те, которые движутся по направлению к диску или от него. А таких, согласно привычной школьной оценке, в единице объема было $n/6$ (n – концентрация молекул, «шесть» – это число сторон куба: вверх – вниз, вправо – влево, вперед – назад). Значит, плотность потока молекул (т.е. число молекул, попадающих на единицу площади в единицу времени), догоняющих слева верхний диск, равна $(n/6)(v-u)$ (легко проверить: при $u = v$ эти молекулы не догонят диск и не

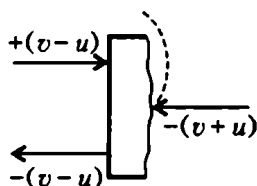


Рис. 2

столкнутся с ним). Далее, каждая молекула ударяется о левую поверхность диска со скоростью $+(v-u)$ (в его системе координат) и, согласно условию упругости удара, отражается обратно с той же по величине скоростью (опять же, в системе диска), но с другим знаком (рис.2): $-(v-u)$. Значит, в неподвижной (лабораторной) системе координат ее скорость

после отражения будет $-(v-u) + u = -v + 2u$, а изменение импульса одной молекулы составит $m(-v + 2u) - mv$. Такой же по величине, но противоположный по знаку импульс получит верхний диск. А умножив его на соответствующую плотность потока молекул и на площадь диска, найдем силу, действующую на верхний диск слева:

$$\frac{n}{6}(v-u)m(2v-2u)S = \frac{mnS}{6}2(v-u)^2 \cdot 2(v-u)^2.$$

Проведем аналогичные рассуждения для правой поверхности верхнего диска. В системе диска скорость перед ударом $-(v+u)$, а после удара 0. Скорость после удара в лабораторной системе равна u , изменение скорости молекулы в лабораторной системе составляет $u - (-v) = u + v$. Плотность потока молекул, налетающих справа на верхний диск, равна $(n/6)(v+u)$, так что суммарная сила, действующая на диск справа, будет

$$-\frac{mnS}{6}(v+u)^2.$$

Можно далее учесть, что произведение mn равно плотности газа ρ , и записать силу, действующую на верхний диск, в виде

$$F = \frac{\rho S}{6} \left(2(v-u)^2 - (v+u)^2 \right) = \frac{\rho S}{6} (v^2 + u^2 - 6vu).$$

Такая же по величине, но противоположная по направлению сила будет действовать на нижний диск, так что система начнет вращаться под действием пары сил как раз в том направлении, которое указано на рисунке 1.

Ясно, что каждая из сил обратится в ноль (и вращение перестанет ускоряться) при условии

$$u^2 - 6vu + v^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, наш исследователь получил установившуюся линейную скорость:

$$u_{\infty} = 3v \pm \sqrt{9v^2 - v^2} = v(3 \pm 2\sqrt{2})$$

и, конечно, выбрал отрицательный знак, чтоб не смешить людей — не может ведь диск двигаться быстрее молекул.

Итак, установившаяся окружная скорость дисков $u_{\infty} = v(3 - 2\sqrt{2}) = 0,172v$ получилась заметно меньше тепловой скорости молекул, поэтому способный изобретатель догадался пренебречь ее квадратом в выражении для F , так что уравнение, описывающее второй закон Ньютона для диска, приобрело вид следующего линейного дифференциального уравнения относительно u :

$$\frac{du}{dt} = \rho \frac{vS}{m} \left(u - \frac{v}{6} \right) = \frac{u - v/6}{\tau}.$$

Даже не решая это уравнение, можно кое-что сказать. Из него, в частности, видно, что ускорение с ростом v уменьшается и обращается в ноль при $u_{\infty} = v/6 = 0,167v$, что действительно близко к найденному ранее значению. А постоянная величина $\tau = m/(\rho v S)$ в знаменателе правой части уравнения называется временем релаксации. Например, если взять $m = 1$ г, $\rho = 10^{-5}$ кг/м³, $v \sim 300$ м/с, $S = 1$ см², то получится $\tau \approx 3 \cdot 10^3$ с ≈ 1 ч. Это — время, за которое почти достигается «предельное значение скорости» u_{∞} (рис.3).

Тут надо обратить внимание, что вся теория построена для свободномолекулярного режима обтекания дисков, поэтому наш изобретатель и взял плотность газа на пять порядков ниже, чем для обычного воздуха. Тогда и длина свобод-

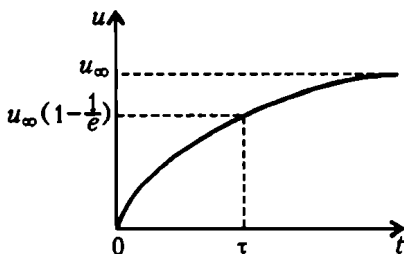


Рис. 3

ного пробега молекул увеличится на пять порядков и, таким образом, вместо 10^{-7} м станет как раз 1 см, что уже сравнимо с принятым размером диска.

Итак устройство должно вращаться вечно. К нему даже можно сделать привод и заставить совершать полезную работу. Однако никакого отношения к тому вечному двигателю, который отказывалась рассматривать Французская Академия наук, наше устройство не имеет. Оно ведь не пытается родить энергию «из ничего»: диски получают энергию при соударениях молекул со стенками сосуда, которые поддерживаются при постоянной температуре. Так что закон сохранения энергии не нарушается.

Казалось бы, все в порядке, и остается только «изобрести» диски нужной конструкции. Необходимо добиться, чтобы с одной поверхностью молекулы соударялись упруго, а с другой – неупруго. Но оказывается, здесь нашего изобретателя подстерегает немалая опасность. Он очень легко может пойти по ложному пути и увязнуть в тщетных попытках сконструировать нечто столь же невозможное, как и вечный двигатель.

«Зеркальность» упругой поверхности равносильна предположению о ее термодинамическом равновесии с газом: молекулы стартуют с поверхности с такой же средней скоростью, как и падают на нее (температуры газа и поверхности одинаковы). Но как сделать другую поверхность «неупругой»? Рассмотрим два варианта подхода к решению проблемы.

В одном из них (назовем его «механическим») поверхность делают пористой: молекулы, попадающие внутрь цилиндрических пор, ударяются о ее «зеркальные» стенки, а каждая пора, плавно искривляясь под прямым углом, выбрасывает молекулу в конце концов сбоку от пластинки.

Другой подход можно назвать «термическим»: специальная жидкость (например, жидкий азот или гелий) постоянно охлаждает «неупругую» поверхность и поэтому средняя энергия отлетающих молекул, определяемая температурой поверхности, будет гораздо меньше, чем энергия падающих молекул.

Какой же из вариантов выбрать? Может показаться, что первый проще и экономичнее: не нужно тратить усилий на поддержание запасов охлаждающей жидкости и для вращения устройства нужно только поддерживать стенки сосуда при постоянной температуре. Возможно, что такое устройство представляло бы собой нечто замечательное и для человечества весьма полезное. Ведь никто не говорит, *какой именно* должна быть температура стенок. Можно поместить миллион таких устройств в океан и качать сколько угодно энергии, а потери энергии будут

постоянно компенсироваться солнечными лучами. Но люди давно поняли, что подобные устройства – которые могли бы работать за счет энергии *одного* теплового резервуара – ничем не отличаются от вечного двигателя. Их даже тоже называли вечными двигателями, но *второго рода*. На попытки сконструировать такой двигатель было затрачено, неверное, не меньше усилий, чем на создание обычных вечных двигателей (*первого рода*), – но безуспешно. И это, конечно, неслучайно. На пути изобретателей стоял второй закон (второе начало) термодинамики. Одна из формулировок этого закона гласит: «Невозможен процесс, единственным результатом которого было бы превращение в работу теплоты, взятой из резервуара при постоянной температуре». Или так: «Невозможно существование циклической машины, работающей за счет энергии одного теплового резервуара». Так что «механический» подход к конструированию неупругой поверхности не может быть успешным (кстати – подумайте, почему он не будет работать).

А вот второй, «термический», подход – с использованием охлаждающей жидкости – не противоречит второму закону термодинамики. Ведь кроме «нагревателя» в виде стенок сосуда здесь присутствует и «холодильник» в виде жидкого азота. Но, к сожалению, эффективность такого устройства вряд ли будет высокой.

Итак, ничего вечного и дарового не существует. Хотя, конечно, жаль.

КОСТРЫ В ПОЛЕ И РУССКАЯ БАНЯ

Только окутает ночь всю землю
росистой влагой,
Как остывает земля и смыкается
сразу плотнее;
И потому из себя, как бы сжатая
чьей-то рукою,
Весь свой запас семян огневых выжимает
в источник,
Делая влагу его испарений
горячей на ощупь.
Лукреций

Когда приходит осень с ее ночными заморозками, а урожай еще не убран, в полях и садах с вечера жгут дымные костры. Зачем? Неужто для того, чтобы за счет тепловыделения согреть воздух? Но, как известно, теплый воздух поднимается вверх — что же в таком случае достанется овощам и фруктам? Явно причина такого преднамеренного задымления в чем-то другом. И это другое связано с *фазовыми превращениями*.

Каждый знает (или может легко убедиться), что для испарения воды нужно затрачивать определенную энергию (чайник ставят на печь), а при конденсации пара ту же энергию нужно отводить (для чего делают охлаждаемые змеевики). Далее, известно, что с повышением температуры растет количество водяного пара, который может содержаться в воздухе (в тропических лесах «душно», а в зимние морозы «дышится легко»), — иначе говоря, с ростом температуры растет давление насыщенного пара. Испол-

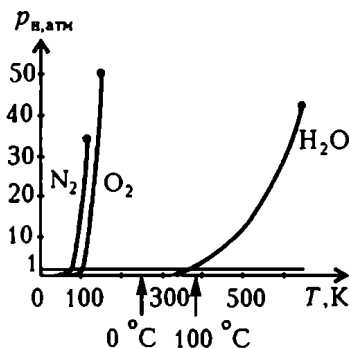


Рис. 1

Опубликовано в «Кванте» №1 за 2002 год.

зуя физические таблицы, можно построить график этой зависимости.

На рисунке 1 приведены соответствующие кривые для воды и для основных компонентов воздуха – азота и кислорода. Особенно отмечен температурный интервал от 0 до 100 °С, в котором существует жидкая вода при нормальном давлении в 1 атмосфере. Уже из самого вида этих кривых понятно, почему воздух не конденсируется «при нормальном давлении», – для этого понадобилось бы сильное охлаждение.

А почему вообще молекулы воды «хотят» сконденсироваться, а молекулы воздуха – «не хотят» (и слава Богу)? Это можно

объяснить, например, при помощи графика потенциальной энергии ϕ взаимодействия двух молекул, находящихся на расстоянии r друг от друга (рис.2). Если это расстояние велико ($r \rightarrow \infty$), то энергия взаимодействия почти нулевая – молекулы «не чувствуют» друг друга. Но по мере сближения (r уменьшается) молекулы попадают на склон графика (например, в точку с координатой r_1) и, как санки с горы, устремляются в потенциальную «яму», где ϕ минимально. (Вспомним, что в поле тяготения Земли каждый предмет тоже старается

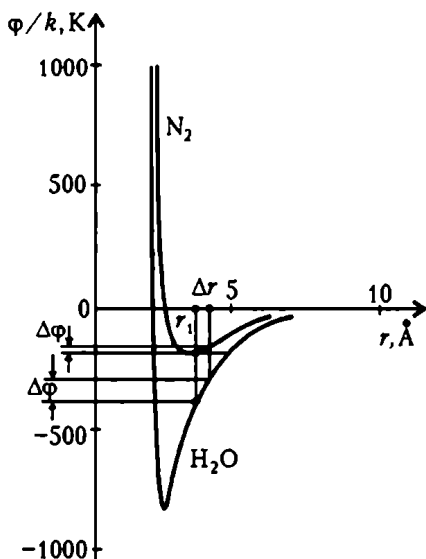


Рис. 2

занять положение с наименьшей потенциальной энергией – в этом можно убедиться, например, слегка столкнув со стола карандаш на стул, а со стула – на пол.)

Ту же мысль можно выразить в терминах сил взаимодействия. Известно, что чем круче гора, тем быстрее мчатся санки. Значит, сила взаимодействия (санок с Землей или молекул друг с другом) зависит от крутизны склона, а эту крутизну можно охарактеризовать быстротой изменения потенциала при изменении расстояния:

$$F = - \frac{\Delta\phi}{\Delta r}.$$

Здесь знак «минус» указывает, что сила направлена в сторону

«дна ямы». Чем больше наклон кривой $\varphi(r)$, тем больше сила взаимодействия (сравните величины $\Delta\varphi$ для водяного пара и азота при одном и том же значении Δr ; см. рис 2). Теперь понятно, что глубина потенциальной «ямы» тесно связана с удельной теплотой испарения (фазового перехода) L , а именно: $\varphi_{\min} \sim L$. Кстати, теперь в качестве масштаба силы можно ввести отношение глубины потенциальной ямы к характерному размеру молекулы r_m :

$$F \sim \frac{|\varphi_{\min}|}{r_m} \sim \frac{L}{r_m}.$$

Найдя в справочниках значения L и r_m , сравним силы, действующие между парой молекул воды и парой молекул азота:

$$\frac{F_{\text{H}_2\text{O}}}{F_{\text{N}_2}} \sim \frac{L_{\text{H}_2\text{O}}}{L_{\text{N}_2}} \frac{r_{m\text{N}_2}}{r_{m\text{H}_2\text{O}}} \sim \frac{2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}}{0,2 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} \frac{3,8 \text{ \AA}}{2,6 \text{ \AA}} \sim 20.$$

Можно сказать, что молекулы воды «любят друг друга» в двадцать раз сильнее, чем молекулы азота.

Итак, в принципе все молекулы жаждут объединиться. Что же им мешает? Их кинетическая энергия. Ведь на дне этой ямы они будут иметь большую скорость – как камень, сброшенный с крыши, имеет максимальную скорость у земли. Тут нужен третий участник процесса – кто-то должен унести эту кинетическую энергию, чтобы пара молекул осталась рядом друг с другом. Конечно, это должна быть третья молекула. Но для того чтобы начался процесс образования *зародышей конденсации*, газ должен стать достаточно холодным – чтобы его молекулы двигались достаточно медленно, успевали сблизиться и отдавать третьему участнику избыток энергии. Какой энергии? Конечно же, теплоты конденсации!

Вот тут-то мы и подошли к кострам в поле.

Расчет теплообмена подогретой воздушной массы с землей и остальной атмосферой – сложная метеорологическая задача. (Всплывающий теплый пузырь, называемый термиком, уносит тепло костра вверх, что нам совершенно ни к чему.) Мы для определенности предположим, что нагретый костром воздух охлажда-

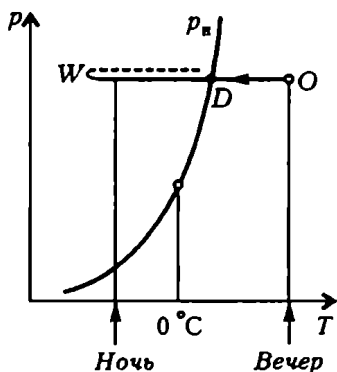


Рис. 3

ется изобарически, т.е. давление остается постоянным. Значит, с падением температуры (например, за счет теплового излучения или теплоотвода в почву) растет плотность смеси воздуха с парами воды. В координатах p, T этот процесс (рис.3) изображается горизонтальной линией ODW , где точка O – начальное состояние (вечером, перед заморозками). Если пар не конденсируется, то в процессе охлаждения изобара пересечет кривую насыщения в «точке росы» D , затем уйдет левее, в область пересыщения ($p > p_n$), и, если отношение p/p_n станет значительным, жидкость начнет выпадать в виде микрокапель с выделением тепла. Точка W называется точкой Вильсона (того самого, который разработал «туманную камеру» для регистрации треков элементарных частиц на порожденных ими ионах в пересыщенном паре).

Но этот процесс спонтанной (самопроизвольной) конденсации может начаться при слишком низких температурах, недопустимых для живых растений. Вот тут-то и приходят на помощь частички дыма. Они предоставляют свою поверхность для «посадки» на нее молекул воды, отводят избыточную теплоту конденсации, а затем отдают ее другим молекулам, соударяющимся с частицей. Теперь, в отличие от спонтанной конденсации, эта *гетерогенная конденсация* происходит без пересыщения пара. Система воздух – пар как бы застревает в точке росы D .

Пора сделать количественные оценки.

Если концентрация частичек сажи (их количество в единице объема) n , а массовая плотность пара ρ_n , и если весь водяной пар сконденсируется на этих частичках, то масса каждой капельки будет

$$m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_v = \frac{\rho_n}{n},$$

где a – радиус капельки, ρ_v – плотность жидкой воды. Следовательно, радиус капельки равен

$$a = \left(\frac{\rho_n}{4\pi \rho_v n / 3} \right)^{1/3}.$$

Конечно, тут предполагается, что все капельки одинаковы.

Выше мы обозначили через L удельную теплоту испарения, или, что то же самое, удельную теплоту конденсации. Теперь оценим приращение температуры воздуха ΔT вследствие конденсации всего пара:

$$c_p \rho_{\text{воз}} \Delta T \sim \rho_n L,$$

где c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении

нии, $\rho_{\text{воз}}$ – плотность воздуха, откуда

$$\Delta T \sim \frac{\rho_{\text{п}} L}{c_p \rho_{\text{воз}}}.$$

Известно, что $L \sim 2,5$ МДж/кг, $c_p \sim 1$ кДж/(кг·К), $\rho_{\text{воз}} \sim 1$ кг/м³. Если принять, что к вечеру плотность пара в воздухе составляет $\rho_{\text{п}} \sim 1$ г/м³, а концентрация частичек сажи от костра порядка $n \sim 10^{11}$ м⁻³, то

$$a \sim \left(\frac{10^{-3}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^3 \cdot 10^{11}/3} \right)^{1/3} \text{ м} \sim 10^{-6} \text{ м} = 1 \text{ мкм}$$

и

$$\Delta T \sim \frac{10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^6}{10^3 \cdot 1} \text{ К} = 2,5 \text{ К}.$$

Это уже кое-что: тепло, выделившееся при конденсации водяного пара на твердых частичках, порожденных кострами, позволяет на несколько градусов отдалиться от точки замерзания воды, опасной для растений.

Но при чем здесь русская баня? А при том, что в ней имеется отделение, которое прямо так и называется: *парная*. Там водяной пар конденсируется на теле купальщика, которое представляется очень холодной поверхностью в сильно нагретом воздухе. Именно выделяющееся тепло конденсации и обжигает тело, что и доставляет удовольствие знатокам этого дела.

Так что, пребывая в бане, думайте о термодинамике!

ПАРОВОЙ СКАЛОЛАЗ, ИЛИ ТЕРМОДИНАМИКА ДЛЯ АЛЬПИНИСТА

*Вот что может произойти, если кто-то
начнет размышлять.*

В.С.Черномырдин

Не слыхали о таком устройстве? А вот послушайте...

Однажды Способныйнавсеученик читал перед сном книгу Дж.Тиндала «Теплота, рассматриваемая как род движения»: «Хоры Бристольского собора были покрыты свинцовыми листами. Длина крыши 60 футов, ширина 19 футов 4 дюйма. Свинец был положен в 1851 году, и два года спустя он всей массой подвинулся вниз на 18 дюймов. Понижение свинца происходило постоянно с тех самых пор, как им были покрыты хоры. Попытка остановить его движение вколачиванием гвоздей в стропила не удалась, потому что сила, с которой опускался свинец, вырывала гвозди. Крыша была некрутая, и свинец мог бы оставаться на ней, не скользя вниз из-за действия тяжести».

Нашлось и объяснение этого явления : «Свинец был подвержен перемене температур дня и ночи. Теплота, сообщаемая ему днем, заставляла его расширяться. Если бы он лежал на горизонтальной плоскости, то он расширялся бы во все стороны одинаково; но, лежа на наклонной поверхности, он расширялся книзу свободнее, чем вверх. Напротив, ночью, когда свинец сжимается, его верхняя часть легче опускается вниз, чем нижняя поднимается вверх. Движение свинца, следовательно, совершенно походило на движение земляного червяка. Днем он подвигал вперед свою нижнюю часть, а ночью верхнюю, и таким образом в два года он подвинулся на расстояние 18 дюймов. Каждое временное изменение температуры дня и ночи способствовало такому движению, и Канон Мозели нашел впоследствии, что сильнейшее опускание свинца происходило при быстрых изменениях температур».

И тут Способногонавсеученика осенила благородная мысль: что если сделать «червяка», который полз бы вверх, а не вниз. Ведь это очень помогло бы альпинистам – они так стараются, забираясь на отвесные скалы. Да и для МЧС пригодилось бы. Твердые тела для этого явно не подходили: уж очень немного они расширяются при нагревании, да к тому же их тянет вниз, а не вверх, как это видно на примере бристольской свинцовой крыши. Конечно, лучше подогревать газ. А из газов лучше всего взять водяной пар, самый дешевый из паров, ибо воды в горах немало. Его легко и расширить, и снова превратить в жидкость при охлаждении (в горах ведь не жарко), уменьшив при этом объем на три порядка.

В конце концов оформилась такая идея конструкции «Скалолаза». Возьмем цилиндр (знакомый Сантехник пообещал нашему герою Абсолютно Нетеплопроводящую Трубу), пружину (знакомый Математик обещал достать Абсолютно Невесомую Пружину), поршень со штоком, небольшое количество воды, или спирта, или эфира, или... (это количество, т.е. массу Δm , еще придется рассчитать) и соберем устройство, изображенное на рисунке 1. Воздух выкачаем из цилиндра (причем как из-под поршня, так и над ним), а давлением насыщенных паров будем пренебрегать, когда цилиндр холодный. Действительно, давле-

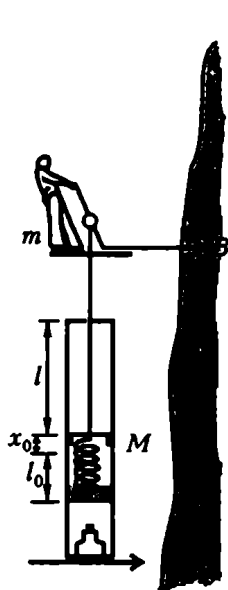


Рис. 1

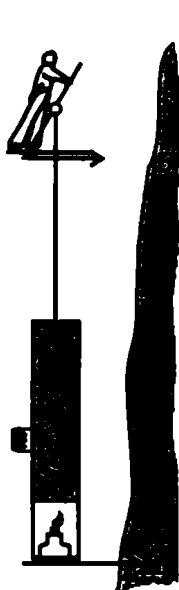


Рис. 2

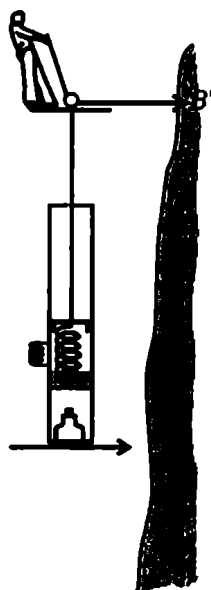


Рис. 3

ние насыщенных паров воды при температуре 100°C (373 К) равно атмосферному, т.е. 10^5 Па (не случайно ведь при этом бурно кипит чайник на плите), а при 0°C (273 К), когда вода еще не замерзла, давление почти в двести раз меньше. Стоит ли учитывать?!

Как же работает это устройство? При испарении жидкости поршень будет двигаться вверх, поднимая альпиниста и растягивая пружину (рис.2). По достижении максимальной точки подъема (ход поршня l) альпинист «зарубается» в точке B' , нижнее крепление цилиндра в точке A освобождается, и пружина подтягивает цилиндр на высоту l (рис.3); при этом ее растяжение остается равным x_0 , таким, что $kx_0 = Mg$. А пар пусть вытесняется поршнем в наружный змеевик-конденсатор, где превращается в жидкость и сливается на дно цилиндра.

Предполагается, что значение координаты поршня $x = 0$ соответствует нерастянутой пружине (обозначим ее длину через l_0); значит, при растяжении на x возникает возвращающая сила $-kx$. В эти терминах работа пара по перемещению массы m альпиниста на высоту l (относительно x_0) запишется в виде

$$A_{\uparrow} = \int_{x_0}^{x_0+l} (mg + kx) dx = mgl + \frac{k}{2} \left((x_0 + l)^2 - x_0^2 \right).$$

Но тепло подогревателя расходуется не только на совершение работы по подъему альпиниста, но и на испарение жидкости и увеличение внутренней энергии образовавшегося пара. На испарение жидкости нужно затратить тепловую энергию (эта энергия выбрасывается в окружающее пространство при конденсации пара в змеевике), равную $r\Delta m_l$, где r — удельная теплота испарения (ее иногда обозначают еще буквой L), Δm_l — масса пара в конце подъема, которую легко найти из уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$\Delta m_l = \frac{p_l M}{RT_l} S(l + l_0 + x_0).$$

Тут все величины известны. Для увеличения внутренней энергии пара понадобится количество теплоты, равное

$$\Delta U = c_v \Delta T \Delta m_l.$$

Здесь $c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}$ — удельная теплоемкость пара при постоянном объеме, R — универсальная газовая постоянная, M — молярная масса пара, а i — число степеней свободы его молекул (например, для одноатомного газа $i = 3$, а для трехатомного газа — типа водяного пара — $i = 6$). Ясно, что в конце подъема (при $x = x_0$

+ l) давление поршня на пар (и значит, давление пара на поршень) больше, чем в начале, на величину

$$p_1 - p_0 = \frac{kl}{S},$$

где S – площадь сечения цилиндра. Предположим, что пар насыщенный, т.е. капелька рабочей жидкости еще остается на дне цилиндра, когда поршень достигает высшей точки подъема. Значит, конечная температура пара T_1 будет несколько больше начальной T_0 . Слово «несколько» отражает тот факт, что зависимость давления насыщенного пара от температуры очень резкая, так что малому изменению $\Delta T = T_1 - T_0$ соответствует существенно большее приращение $\Delta p = p_1 - p_0$. Эту связь давления насыщенных паров с температурой для любого вещества можно найти в соответствующих справочниках. А можно использовать так называемый закон Клапейрона – Клаузиуса $\frac{dp}{dT} = \frac{r}{TV}$, где V – объем пара. Для численной оценки можно малые приращения в уравнении заменить конечными Δp и ΔT , тогда $V = lS$ – объем, занимаемый паром в конце расширения. При большом желании можно проинтегрировать уравнение (по температуре) и получить зависимость $p = p_0 e^{\frac{rM}{RT}}$.

Что же общего в движениях свинцовой крыши и «Скалолаза»? То, что оба движения периодические, в обоих важную роль играет тяготение, оба связаны с тепловыми процессами. А что различного? То, что в случае крыши существенное значение имеет сила трения, а в случае вертикального движения «Скалолаза» ее вообще нет. Но не будем сейчас увлекаться подробностями о том, как поехала крыша. Нам ведь нужно двигаться вверх, а не вниз.

Итак, сделан первый набросок теории. Наш Способныйнавеученик понимал, что принято много упрощающих предположений – например, о полном отсутствии воздуха в цилиндре, об идеальной теплоизоляции, идеальной пружине (к тому же Сантехник и Математик стали намекать, что не так уж просто достать Абсолютно Нетеплопроводную Трубу и Абсолютно Невесомую Пружину – самим надо).

В общем, как во всяком большом деле, тут-то и надо начинать работать – сделать численные оценки, решить уравнения, оптимизировать конструкцию (минимум веса и расхода топлива, максимум скорости подъема), затем создать работающую модель, наладить производство, сбыт и получение прибыли.

ГДЕ НАЙТИ ПРОШЛОГОДНЮЮ ЗИМУ?

Большие керамические сосуды для хранения продуктов, чтобы охладить их, зарывали в землю на глубину, превышающую человеческий рост (найлены в Кноссе, Трое, Тиринфе).

Словарь античности

Великий Лукреций весьма любопытно объяснил полугодовую периодичность колебаний температуры на некоторой глубине под землей:

Летом в колодцах вода холодней, потому что от зноя
Пористой почва тогда и скорей выпускает на воздух
Жара она семена, какие в ней только найдутся.

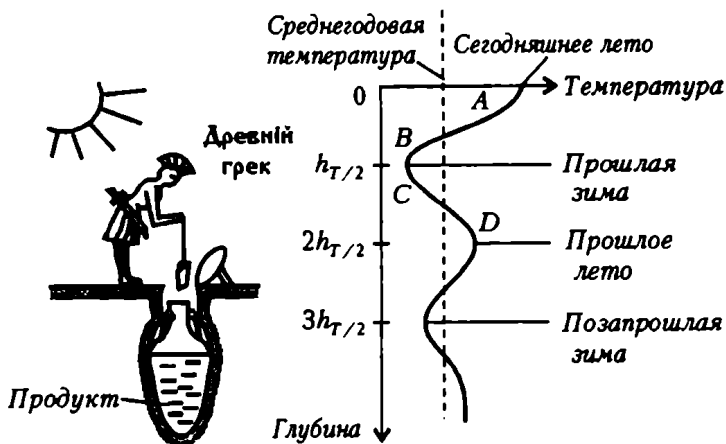
...В холод, напротив, она, под давлением стужи сжимаясь,
Как бы смыкается вся и, сходясь все плотней и плотнее,
Весь свой остаток тепла выжимает, конечно, в колодцы.

С тех пор физика выработала более строгие понятия, чем «семена жара» или «давление стужи», – скажем, такие вполне измеримые величины, как плотность ρ или удельная теплоемкость c . Эти понятия сейчас пригодятся нам.

А еще одна важная физическая величина, имеющая отношение к делу, называется *теплопроводностью* (или коэффициентом теплопроводности). О ней стоит поговорить особо. Вводится она очень просто и, как все в науке, практически целесообразно.

Например, нужно узнать, сколько тепла каждую секунду уходит зимой через каждый квадратный метр стены дома на улицу – это ведь поможет рассчитать количество дров, угля или электроэнергии, необходимое для отопления помещения. Пусть температуры внутренней и наружной поверхностей стены $t_{в}$ и $t_{н}$, а ее толщина h . Тогда искомую плотность потока тепла q , его размерность $[q] = \text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, записывают в виде

$$q = \lambda \frac{t_{в} - t_{н}}{h}. \quad (1)$$



Вот здесь уже и введен коэффициент теплопроводности λ . Предполагается, что этот коэффициент не зависит ни от температур, ни от толщины стенки, а характеризует только свойства ее вещества, так что строитель может найти его значение в Справочнике.

Из записанного равенства легко установить размерность коэффициента теплопроводности: $[\lambda] = \text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$. Для наших целей важно, что сюда входит единица времени. А это позволяет из всех перечисленных величин ρ , c , h , λ составить комбинацию, имеющую размерность времени:

$$\tau \sim \frac{\rho c}{\lambda} h^2.$$

Для чего? А для того чтобы узнать глубину $h_{T/2}$, на которую «дойдет» температура, полгода назад ($\tau = T/2$) бывшая на поверхности земли. Получим

$$h_{T/2} \sim \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} \frac{T}{2}}. \quad (2)$$

Конечно, физические свойства почвы чрезвычайно разнообразны – навряд ли суглинок, чернозем и гранит отличны друг от друга по плотности, теплоемкости и теплопроводности. Но для комплекса $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ можно принять некое «среднее» значение $2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, этот комплекс так прямо и называется *температуропроводностью*.

А сколько секунд содержит один год? Посчитаем:

$$T = 3600 \frac{\text{с}}{\text{ч}} \cdot 24 \frac{\text{ч}}{\text{сутки}} \cdot 365 \text{ суток} = 3 \cdot 10^7 \text{ с}.$$

Подставляя все это в полученную для $h_{T/2}$ формулу (2), имеем оценку

$$h_{T/2} \sim \sqrt{\frac{aT}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с} \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ с}}{2}} \sim 2 \text{ м}.$$

Разумеется, это всего лишь оценка по порядку величины, но и она объясняет, почему древние греки зарывали сосуды глубже своего роста – там проходит волна холода от прошлой зимы, когда на поверхности царит лето.

На рисунке качественно изображена «мгновенная картина» распределения температуры по глубине. Но почему колебания температуры постепенно уменьшаются с глубиной? Все из-за той же теплопроводности: с одной стороны, она позволяет тепловой энергии проникать внутрь земли, а с другой – она же способствует «рассасыванию горбов и впадин» температуры. В частности, по «склону» AB тепловая энергия течет вглубь, а по склону DC – вверх, согласно соотношению (1).

Аналогичную мгновенную картину распределения температуры можно нарисовать и для звуковой волны в воздухе. К счастью, при тех частотах, на которых мы общаемся друг с другом или слушаем музыку, теплопроводность воздуха не играет большой роли: его последовательные сжатия и разрежения происходят так быстро, что теплопроводность не успевает сгладить «горбы и впадины» температуры. Или, как сказал бы физик, *дисперсия* и *затухание* акустической волны незначительны.

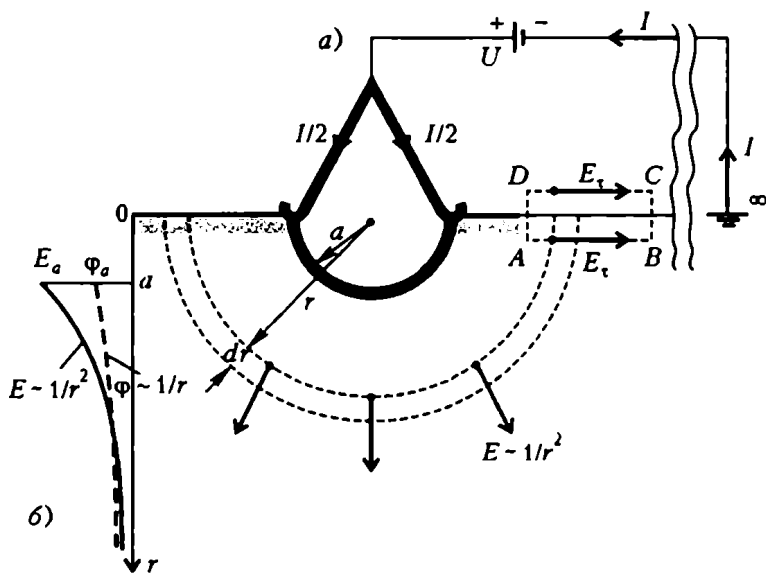
Но об этом ли думал древний грек, зарывая амфору?..

КАК В ЗЕМЛЮ КАЗАН ЗАКОПАЛИ

*На что мне нужны твои котлы? На голову
я их надену, что ли?*

А.П.Чехов

Но в физике всему можно найти применение. Так, если у вас есть старый казан (полусферическая кастрюля), не выбрасывайте его, а вкопайте в землю. Затем подключите казан к одной из клемм источника напряжения U , а к другой его клемме соедините идеальный длинный провод, который постарайтесь заземлить подальше, желательно на бесконечности (см. рисунок). Рано или поздно в проводах (отходящем от батареи к казану и подходящем к ней из бесконечности) установится постоянный ток I . Точно такой же ток должен течь от казана в землю – ведь заряды не создаются и не уничтожаются, причем этот поток



Опубликовано в «Кванте» №1 за 2001 год.

зарядов должен быть одинаковым через любую полусферу радиусом r и, следовательно, площадью $2\pi r^2$. Все это следствия закона сохранения заряда. А вот плотность тока j_e (т.е. ток через единицу площади поверхности) должна уменьшаться по мере удаления от казана (и, следовательно, увеличения поверхности полусферы).

Если считать картину сферически (точнее, полусферически) симметричной, то плотность тока равна

$$j_e = \frac{I}{2\pi r^2}. \quad (1)$$

Но что же вызывает движение этих зарядов в каждой точке проводящей среды? Конечно, локальное электрическое поле. Причем плотность тока \vec{j}_e прямо пропорциональна напряженности поля \vec{E} , а коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом электропроводности* σ :

$$\vec{j}_e = \sigma \vec{E}. \quad (2)$$

Обратная коэффициенту электропроводности величина называется *удельным электрическим сопротивлением*:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}.$$

Эти коэффициенты очень полезны в электротехнике. Так, если у вас есть кусок проволоки длиной l с поперечным сечением S из материала с удельным электрическим сопротивлением ρ , то его сопротивление R легко найти по формуле

$$R = \frac{l}{S} \rho = \frac{l}{S\sigma}.$$

А эта величина связывает разность потенциалов (напряжение) U , приложенную к концам проволоки, и постоянный ток, который потечет в ней:

$$U = IR. \quad (3)$$

Но полубесконечное пространство проводящей земли под казаном ($a \leq r < \infty$) вовсе не похоже на кусок проволоки. Как бы найти его суммарное сопротивление?

Вспомним, что напряженность электрического поля есть сила, действующая на единичный заряд. Если этот заряд поле перемещает на расстояние $d\vec{r}$, то оно совершает при этом работу $E d\vec{r}$ (здесь учтено, что в рассматриваемом случае вектор поля \vec{E} направлен вдоль перемещения $d\vec{r}$). А какая работа необходима для того, чтобы «протащить» через единицу площади поверхно-

сти в единицу времени заряд, численно равный j_e ? С помощью выражений (1) и (2) получим (в вольтах)

$$dA = \frac{I}{2\pi r^2 \sigma} dr. \quad (4)$$

Будем считать, что провода и металлический казан – идеальные проводники (не оказывают сопротивления току), а удельная проводимость земли постоянна в пространстве. Тогда вся работа на пути от $r = a$ (поверхность казана) до $r \rightarrow \infty$ получится в результате интегрирования выражения (4):

$$A = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma a}.$$

Но кто совершает эту работу? Конечно же, источник напряжения:

$$A = U.$$

Сравнивая с выражением (3), получим

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a}.$$

Выходит, что суммарное электрическое сопротивление всего полубесконечного пространства с заданным коэффициентом σ зависит только от радиуса казана a . В соответствии с выражением (3), можно подобрать эквивалентный «провод», обладающий тем же сопротивлением: например, диск радиусом a (и, следовательно, сечением $S = \pi a^2$) и толщиной $l = a/2$ из вещества с тем же значением σ .

Итак, в рассматриваемом случае однородной электропроводящей среды существует радиальное поле с напряженностью $E \sim 1/r^2$ (как бы от точечного заряда, помещенного в центре казана) и постоянный ток с плотностью $j_e \sim 1/r^2$ ($a \leq r < \infty$). Движение зарядов вызывается разностью потенциалов $U = \varphi_a - \varphi_{\infty}$. Но что такое потенциал в точке r ? Он тесно связан с работой поля по перемещению единичного заряда, которую мы уже упоминали выше:

$$d\varphi = -dA = -E dr. \quad (5)$$

Значит,

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Отсюда легко найти радиальную зависимость потенциала:

$$\varphi(r) - \varphi_a = -\int_a^r E dr = -\frac{I}{2\pi\sigma} \int_a^r \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (6)$$

Проверим так называемые граничные условия: при $r = a$ получаем $\varphi(r) = \varphi_a$; при $r \rightarrow \infty$ имеем $\varphi_\infty - \varphi_a = -\frac{I}{2\pi a\sigma} = -U$. Таким образом, формулу (6) можно записать также в виде

$$\frac{\varphi(r) - \varphi_\infty}{\varphi_a - \varphi_\infty} = \frac{a}{r}. \quad (7)$$

Понятно также, зачем взят знак «минус» в формуле (5) – чтобы радиальная зависимость потенциала имела вид горки (см. рисунок б), по склону которой положительные заряды «скатываются» в область меньших значений φ (как санки с ледяной горы). Кстати, теперь легко объяснить, почему от упавшего на землю высоковольтного провода нужно уходить очень мелким шагом: ведь вблизи него потенциал резко меняется с расстоянием, и при обычном шаге между ногами может возникнуть очень большая разность потенциалов – так называемое шаговое напряжение.

Отметим, что в «новых» терминах соотношение (2) примет вид

$$j_e = -\sigma \frac{d\varphi}{dr}. \quad (8)$$

Но что творится над землей? Если считать, что воздух не проводит электричество, т.е. положить $\sigma = 0$, то в воздухе не будет и электрического тока: $j_e = 0$. А электрическое поле? Рассмотрим прямоугольный контур $ABCD$ (см. рисунок а), верхняя сторона которого расположена над землей, нижняя – в земле, а боковые стороны очень (ну, очень!) малы. Если протащить некоторый заряд по этому (замкнутому) контуру (например, в указанном порядке расположения букв), то суммарная работа обязана равняться нулю – ведь в этом контуре нет никаких источников тока, а электростатическое поле потенциально. Это значит, что если поле существует в земле, то оно обязано быть и в воздухе около земли. Более того, тангенциальная (касательная) составляющая этого поля E_t вне земли (направленная вдоль стороны DC) должна в точности равняться тангенциальной составляющей поля в земле (направленной вдоль стороны AB). Заметим, что здесь ничего не сказано о нормальной составляющей электростатического поля на поверхности земли. Она может существовать, может испытывать скачок на поверхностных зарядах (так же, как нормальная – радиальная – составляющая поля терпит разрыв на зарядах, расположившихся на поверхности казана). Поэтому у поверхности раздела

воздух – земля линии напряженности электростатического поля могут быть искривлены.

А что если взять два казана, сложить их в виде сферы и закопать поглубже – тогда, может быть, электрическое поле станет совсем сферически симметричным? Ну, хотя бы в некоторой окрестности этого Двухказанья, еще далеко от земли? Но и тут вопрос: а провод, подводящий ток, – не нарушает ли он этой прекрасной симметрии? Вот и подумайте. Секрет развития науки в том и состоит, что, ответив на один вопрос, она ставит другие.

Теперь подойдем к казану с другой точки зрения. Представим себе, что он наполнен кипятком, температура которого T_a поддерживается постоянной. Тогда в окружающей почве установится стационарное распределение температуры, и тепловая энергия будет постоянно «течь» от казана в бесконечность, где температура равна T_∞ . Иначе говоря, поток тепловой энергии между казаном и бесконечностью обеспечивается разностью температур $T_a - T_\infty$. Значит, по аналогии с электричеством, температуру можно назвать потенциалом, а плотность теплового потока j_T выразить соотношением типа (8):

$$j_T = -\lambda \frac{dT}{dr}, \quad (9)$$

где λ – коэффициент теплопроводности среды.

И это еще не все. Представим себе, что казан «равномерно дырявый», и некий добрый человек поддерживает в нем постоянный уровень супа. Тогда содержимое казана плотностью $\rho_{\text{супа}}$ будет диффундировать через почву, и рано или поздно установится стационарное распределение этого вещества в пространстве. Ясно, что около казана почва плотностью ρ будет больше насыщена супом, а чем дальше – тем меньше. Тут уместно ввести понятие массовой доли диффундирующего вещества $C = \rho_{\text{супа}}/\rho$. Будем считать, что эта величина всюду много меньше единицы («слабый раствор»), хотя и меняется в пространстве. Тогда, по аналогии с двумя ранее рассмотренными случаями, можно сказать, что поток диффундирующего вещества обеспечивается разностью потенциалов $C_a - C_\infty$, а в каждой его точке плотность потока j_m выражается соотношением типа (8) и (9):

$$j_m = -D \frac{dC}{dr}, \quad (10)$$

где D – коэффициент диффузии (или, если угодно, *массопроводности*) среды.

И вот теперь – самое замечательное: все рассмотренные распределения так называемых потенциалов можно записать

совершенно одинаково (!):

$$\frac{\varphi(r) - \varphi_{\infty}}{\varphi_a - \varphi_{\infty}} = \frac{T(r) - T_{\infty}}{T_a - T_{\infty}} = \frac{C(r) - C_{\infty}}{C_a - C_{\infty}} = \frac{a}{r}. \quad (11)$$

И суммарные потоки соответствующей физической субстанции – заряда I , тепловой энергии Q_T , массы Q_m – тоже можно записать одинаково:

$$I = \frac{1}{R}(\varphi_a - \varphi_{\infty}), \quad Q_T = \frac{1}{R_T}(T_a - T_{\infty}), \quad Q_m = \frac{1}{R_m}(C_a - C_{\infty}),$$

где видны уже знакомое суммарное сопротивление электрическому току:

$$R = \frac{1}{2\pi a \sigma},$$

а также сопротивления потоку тепла и массы:

$$R_T = \frac{1}{2\pi a \lambda} \quad \text{и} \quad R_m = \frac{1}{2\pi a D}.$$

А какая из всего этого польза? Очень большая. Например, вы хотите узнать распределение температуры или концентрации вещества в гораздо более сложной ситуации, чем рассмотренная нами (достаточно симметричная). Скажем, в случае слоистой земли, в которой встречаются к тому же полости, валуны и другие неоднородности. Тогда, пользуясь *электро-тепло-массовой аналогией*, рассмотренной нами, можно распределение температуры или концентрации смоделировать распределением электрического потенциала в среде с таким же распределением коэффициента электропроводности, как и пространственные распределения коэффициентов теплопроводности или диффузии (массопроводности). Измерение токов и разностей потенциалов – более простая задача, чем измерение температур и концентраций, да и установление электрических полей происходит быстрее. И такое экспериментальное оборудование можно собрать «на столе».

Подобные «аналоговые» установки использовались в прикладной физике до развития мощной вычислительной техники. Но и с ее развитием аналогии физических процессов не потеряли смысла – только теперь они понимаются как *одинаковость уравнений и их решений при одинаковых граничных условиях*. Лучшее всего эту мысль иллюстрирует цепочка равенств (11).

Итак, если у вас есть старый котел или казан – не выбрасывайте, а ... подумайте о физике.

СКОЛЬКО ПУЗЫРЬКОВ В ШАМПАНСКОМ?

В природе и в человеческой практике известно немало случаев вскипания жидкостей без преднамеренного нагревания. Например: при истечении на поверхность с больших глубин, при разгерметизации трубопроводов с жидким теплоносителем (аварии энергетических установок), при раскупоривании бутылок с шампанским, пивом, содовой, спрайтом... – кто же не наблюдал с радостью искрящуюся пузырьками газированную воду в жаркий день!

При транспортировке таких жидкостей по трубам бывает важно знать, какой объем растворенных в них газов уже выделился в виде пузырьков. Конечно, можно было бы сделать забор пробы, но, пока эту пробу проанализируют, какое отношение она будет иметь к той смеси, что была в момент забора? Поэтому лучше всего воспользоваться электромагнитным полем – ведь информация о его изменениях распространяется со скоростью, равной скорости света, так что реальные технологические процессы будут казаться как бы застывшими (квазистатическими).

Рассмотрим, например, как можно воспользоваться простейшим плоским конденсатором для почти мгновенной регистрации свойств протекающей через него жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ , содержащей газовые пузыри или пузырьки, внутри которых $\epsilon_1 = 1$ (рис. 1). Под «пузырями» будем понимать

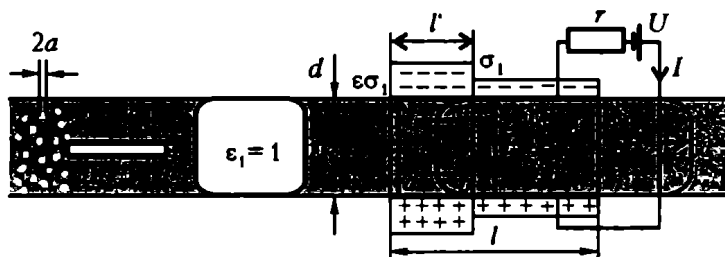


Рис. 1

Опубликовано в «Кванте» №1 за 2000 год.

объемы газа, размеры которых сравнимы с характерными размерами конденсатора l и d , а под «пузырьками» – те объемы, размеры которых существенно меньше d .

Пусть пластины конденсатора, площадью S каждая, подключены к источнику постоянной ЭДС U (батарейке). Ясно, что что-то будет неодинаково в двух случаях: когда конденсатор полностью занят жидкостью или когда содержит только газ. Что же именно?

Если пренебречь сопротивлением проводов и внутренним сопротивлением источника r , то разность потенциалов между пластинами конденсатора будет постоянна и равна U . (Следовательно, электропроводность газожидкостной смеси предполагается пренебрежимо малой.) Значит, и напряженность электрического поля в обоих случаях будет одной и той же и равной $E = U/d$. А вот заряд на пластинах будет различен – ну, хотя бы потому, что емкость пустого плоского конденсатора равна $C_1 = \epsilon_0 S/d$, емкость заполненного диэлектриком в ϵ раз больше: $C_\epsilon = \epsilon C_1$, а заряд равен $q_{1,\epsilon} = C_{1,\epsilon} U$. Иными словами, сам заряд и его поверхностная плотность на пластинах в этих двух крайних случаях будут отличаться в ϵ раз:

$$q_\epsilon = \epsilon q_1, \quad \sigma_\epsilon = \epsilon \sigma_1, \quad \text{где } \sigma_1 = \frac{q_1}{S} = \epsilon_0 \frac{U}{d}.$$

Кстати, напряженность поля между пластинами будет одинаковой, даже если диэлектрик лишь частично «вдвинут» в конденсатор, как это показано на рисунке 1. (В противном случае работа по перемещению некоего заряда по пути $abcf$ не была бы равна нулю, а это строго запрещено в электростатике.)

Легко понять, что если в данный момент времени диэлектрик занимает часть объема конденсатора, равную l'/l , то суммарный заряд на конденсаторе равен

$$q = q_1 \left(1 - \frac{l'}{l}\right) + q_\epsilon \frac{l'}{l} = \frac{\epsilon_0 S U}{d} \left(1 + \frac{l'}{l} (\epsilon - 1)\right). \quad (1)$$

Если диэлектрик будет «вдвигаться» с постоянной скоростью v , то $l' = vt$, так что в цепи потечет постоянный ток

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\epsilon_0 S U}{d} \frac{v}{l} (\epsilon - 1) \quad \text{при } 0 < t < \frac{l}{v}. \quad (2)$$

Когда жидкость заполнит весь конденсатор, заряд достигнет наибольшей величины $q_\epsilon = \epsilon q_1$ и перестанет изменяться, а когда в конденсатор начнет входить следующий газовый пузырь, заряд станет убывать с той же скоростью – ток будет отрицательным

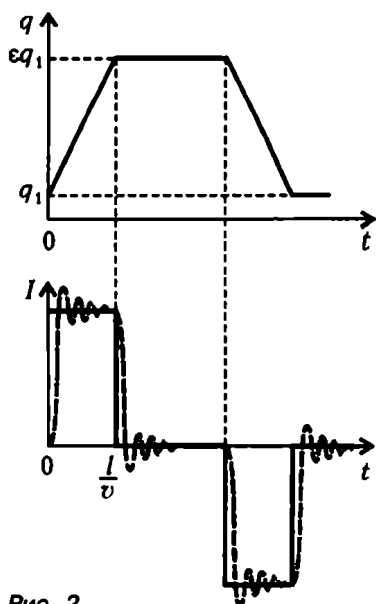


Рис. 2

плоскую «щель» шириной h , параллельную пластинам конденсатора (см. рис. 1 и 3). По-прежнему перемещая некий пробный заряд по контуру $abcf$ (см. рис. 3), мы должны совершить нулевую работу. Другими словами, разность потенциалов между точками

(рис. 2). Таким образом, даже если наша плоская «труба» будет совершенно непрозрачной, по изменению электрического тока мы сможем «увидеть» перемежающиеся участки движущейся жидкости и газа.

Рассмотренный тип течения газожидкостной смеси (когда газовый пузырь заполняет все сечение потока) представляется нежелательным с точки зрения производства, например, газированной воды, ибо обе фазы, как видно, полностью разделены, а их как раз хотелось бы смешать. Поэтому обсудим далее более благоприятный случай. Пусть теперь газовый «пузырь» представляет собою плос-

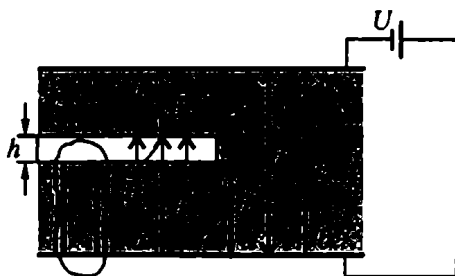


Рис. 3

a и f равна таковой для точек b и c :

$$E_e(d - h) + E_i h = U, \quad (3)$$

где E_i — напряженность поля в щели, а E_e — в диэлектрике (жидкости) с обеих сторон от щели. Кроме того, учтем, что

$$E_i = \epsilon E_e. \quad (4)$$

Собственно говоря, в школьном учебнике так и написано: «Диэлектрическая проницаемость среды – это физическая величина, показывающая, во сколько раз модуль напряженности электрического поля (E_ϵ) внутри однородного диэлектрика меньше модуля напряженности поля (E_i) в вакууме». И дана справедливая оговорка, что такое определение справедливо лишь в частных случаях – например, для пластин в однородном поле (и несправедливо для шаровой полости). Поэтому подумаем еще раз, что такое ϵ . (Ранее мы приняли его как множитель, который показывает, во сколько раз увеличивается емкость плоского конденсатора с диэлектриком по сравнению со случаем пустого конденсатора.) Мысленно вырежем из нашего устройства призму с поперечным сечением площадью ΔS (рис.4). Пластина конденсатора несет заряд $+\sigma\Delta S$, и поле над

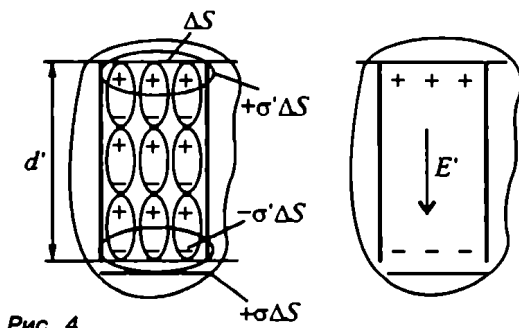


Рис. 4

этой пластиной (в вакууме) равно $E_i = \sigma/\epsilon_0$ (а ниже этой пластины, т.е. вне конденсатора, оно равно нулю). Кусок диэлектрика в выделенной призме, попав во внешнее (по отношению к нему) поле E_i , поляризуется. Этот факт условно показан в виде нескольких диполей, выстроившихся вертикально. Видно, что внутри диэлектрика заряды противоположных знаков, принадлежащие соседним диполям, компенсируют друг друга, а на поверхностях диэлектрика торчат их «хвосты» с зарядами $\pm\sigma'\Delta S$. Дипольный момент этого призматического куса диэлектрика равен $\Delta p = \sigma'\Delta S d'$ и направлен вверх (от отрицательного заряда к положительному). А напряженность поля, порожденного этими поляризационными зарядами, равна $E' = -\sigma'/\epsilon_0$ и направлена противоположно дипольному моменту и внешнему полю. Таким образом, напряженность суммарного электрического поля равна

$$E_\epsilon = E' + E_i = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Остался последний шаг. Введем еще одно понятие – объемную плотность дипольного момента:

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta S d'} = \sigma' = -\epsilon_0 E'.$$

Вот она-то и связана с суммарным полем в диэлектрике соотношением

$$P = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E_\epsilon,$$

которое и можно считать более общим локальным определением диэлектрической проницаемости, приемлемым для любой точки однородного или неоднородного диэлектрика.

Из соотношений (3) и (4) легко найти электрический заряд на пластинах в том случае, когда рассматриваемый газовый «пузырь» длиннее длины конденсатора l (и выступает за его края):

$$q = \epsilon_0 \epsilon S E_\epsilon = \epsilon_0 S \frac{U}{d} \langle \epsilon \rangle.$$

Здесь введено обозначение среднеобъемной диэлектрической проницаемости

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\epsilon}{1 + (\epsilon - 1) h/d},$$

которая учитывает долю объема h/d , занятую плоским «пузырем».

Если теперь аналогично (1) рассмотреть процесс постепенного вдвигания этого «пузыря» в конденсатор с постоянной скоростью v , то аналогично (2) можно найти ток в цепи:

$$I = \frac{-\epsilon_0 S U}{d} \frac{v}{l} \frac{\epsilon(\epsilon - 1) h/d}{1 + (\epsilon - 1) h/d}.$$

Это выражение явно отличается от выражения (2) и совпадает с ним по модулю лишь в случае $h/d \rightarrow 1$, когда в конденсатор вдвигается газовый пузырь (см. падающую ветвь $I(t)$ на рисунке 2).

Но пора вспомнить о пузырьках (см. левую часть рисунка 1), таких маленьких и круглых. Хотя каждый из них мал, их суммарный относительный объем может изменяться в широких пределах – от нуля (совсем нет газовой фазы) до единицы (все пузырьки слились в один газовый «снаряд»). Трудность описания такой среды усугубляется тем, что радиусы пузырьков могут быть различны, расстояния между ними случайны; сталкиваясь, они могут сливаться в более крупные или дробиться. А тут еще электрическое поле, которое поляризует их и застав-

ляет дополнительно взаимодействовать, как и положено диполям. Кстати, а в каком поле находится каждый из них? Конечно, в поле, порожденном всеми зарядами – и свободными (на проводящих пластинах конденсатора), и связанными (поляризационными). И что же означают слова «пузырек находится в поле»? По-видимому, это значит, что он находится в поле, которое осталось бы, если бы пузырек был удален, – тогда в возникшей полости осталось бы поле, порожденное всеми оставшимися электрическими зарядами. С этой проблемой до нас мучились многие замечательные ученые: Ленгмюр, Клаузиус, Моссотти, Лоренц...

Все эти слова сказаны для того, чтобы обрисовать сложность проблемы. Конечно, ученый скажет так: давайте разобьем проблему на части. Сначала рассмотрим один сферический пузырек в безграничной жидкости, в которой достаточно далеко от пузырька (на «бесконечности») задано однородное поле E_0 . Потом предположим, что пузырьков много – N штук в кубическом метре, но все они одинаковы и находятся в среднем на одном и том же расстоянии друг от друга – порядка $1/\sqrt[3]{N}$. И в результате найдем некоторую эффективную, или среднеобъемную, диэлектрическую проницаемость такой пузырьковой жидкости. Но даже эту скромную программу выполнить не очень легко, да это и не обязательно делать сейчас до конца – на основе двух рассмотренных выше примеров ясно, что результат будет зависеть от суммарного объема пузырьков, попавших в конденсатор, и что временная зависимость тока будет скорее всего иной, чем в упомянутых примерах.

А что еще мы не учли в этих случаях? Многое. Например, что диэлектрик втягивается в конденсатор. Это значит, что в первом случае «снарядного» течения газовый пузырь, попавший в конденсатор, будет сжиматься слева и справа двумя пробками жидкости. То же самое будет происходить и с пузырьковой жидкостью, если суммарный объем пузырьков будет непостоянен в пространстве, так что движение такой газожидкостной смеси в конденсаторе не будет равномерным.

Далее, в реальности существует сопротивление проводов и внутреннее сопротивление источника напряжения. Если их сумма равна r , то разность потенциалов между пластинами конденсатора запишется в виде

$$\frac{q}{C(t)} = U - rI(t)$$

и уже не будет постоянной величиной. А если учесть еще

индуктивность цепи L и соответствующую ей ЭДС самоиндукции $-L \frac{dI}{dt}$, то закон Кирхгофа даст страшное дифференциальное уравнение для заряда:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(t)} = U ,$$

которое описывает затухающие колебания. Решить это уравнение сложно, так как емкость конденсатора изменяется со временем (в этом-то и состоит суть метода), но можно ожидать, например, что на вышенарисованную кривую зависимости тока от времени наложатся «гармошки» колебаний (см. рис.2, точечную кривую).

Кроме того, можно предложить и другую схему измерений. Например, зарядить конденсатор от какого-либо источника, затем отключить последний и сохранять на пластинах постоянный заряд (вот тут-то и пригодится пренебрежимо малая электропроводность жидкости). Тогда при прохождении через конденсатор жидкости с различным содержанием газа в пузырьках будет изменяться разность потенциалов между пластинами. Такие приборы существуют и называются *емкостными датчиками*.

Надо признаться, что такими способами мы найдем только суммарный относительный объем газовой фазы, а не концентрацию пузырьков. Не худо было бы определить как-нибудь и их средний размер. Нужно, следовательно, использовать еще какие-то физические явления и приборы (например, оптические)... Так что, прежде чем открыть бутылку нарзана, подумайте о числе пузырьков и законах физики. И – приятного аппетита!

КТО-ТО ПРИБЛИЖАЕТСЯ?

...сообщения об НЛО уже в большом количестве появляются в середине XIX века, а в годы II мировой войны появляется масса документальных свидетельств о прямо-таки нашествии НЛО на землю.

Священник Родион. Люди и демоны

Всевозможные «очевидцы» и «контактеры» сообщают о чрезвычайно быстрых и бесшумных перемещениях неопознанных летающих объектов (НЛО). При этом большая часть информации об этих объектах получается в видимом диапазоне спектра (проще говоря, при помощи глаз и, изредка, обычной фотопленки). А нет ли принципиальной возможности зарегистрировать приближающийся бесшумный НЛО в отсутствие видимости (например, в случае тумана или если НЛО-навтам захочется погасить свои огни)? Какова бы ни была суть этого явления, воспользуемся им для обсуждения законов физики.

Начнем с бесконечного прямого провода, по которому течет постоянный ток I (рис.1). Как известно, он порождает магнитное поле, линии индукции которого представляют собою концентрические окружности в плоскостях, перпендикулярных проводу. При этом модуль магнитной индукции одинаков во всех точках выделенной окружности радиусом r_1 (пунктирная линия) и убывает с расстоянием обратно пропорционально этому

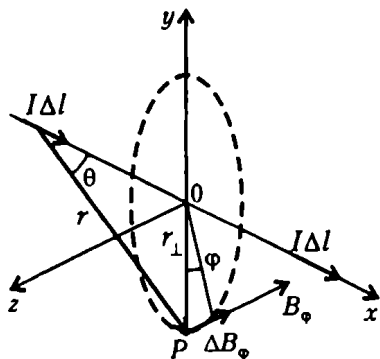


Рис. 1

радиусу:

$$B_{\Phi} \sim \frac{I}{r_1}, \quad (1)$$

где индекс Φ подчеркивает, что индукция имеет только касательную к окружности составляющую.

Этот вектор индукции \vec{B} можно представить как результат суммирования вкладов от отдельных элементов тока $I \Delta \vec{l}$. На рисунке 1 изображены два таких элемента, симметричных относительно рассматриваемой плоскости. Каждый из этих элементов порождает элементарное поле с индукцией

$$\Delta B_{\Phi} \sim \frac{I \Delta l \sin \theta}{r^2}, \quad (2)$$

где θ — угол между направлением элемента тока $I \Delta \vec{l}$ и радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из этого элемента в точку наблюдения P . Эта запись отражает закон Био-Савара-Лапласа. Уже одно присутствие стольких замечательных имен говорит о важности закона (2), так что при взгляде на него хочется снять шляпу. В частности, из выражения (2) следует, что индукция пропорциональна самому элементу тока и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до него. Вспомним, кстати, что такой же характер имеет и зависимость напряженности электрического поля точечного заряда (это нам пригодится). Далее, видно, что элемент тока не порождает индукции

вдоль своего направления (при $\theta = 0$).

Кто хочет, может просуммировать (проинтегрировать) вклады всех элементов тока и получить из выражения (2) формулу (1). Мы же перейдем к рассмотрению НЛО.

Пусть он имеет форму шара радиусом a и несет заряд q , двигаясь с постоянной скоростью \vec{v} , параллельной земле (рис.2). Будем вести наблюдение за магнитным полем, порожденным этим движущимся зарядом, в вертикальной плоскости xy , содержащей вектор \vec{v} . Если высота полета h , а расстояние по горизонтали до точки наблюдения x , то $r = \sqrt{h^2 + x^2}$ и $\sin \theta = h/r$. Кроме того, легко видеть (хотя

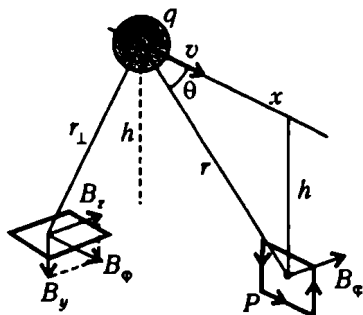


Рис. 2

нужно было доказать), в вертикальной плоскости xy , содержащей вектор \vec{v} . Если высота полета h , а расстояние по горизонтали до точки наблюдения x , то $r = \sqrt{h^2 + x^2}$ и $\sin \theta = h/r$. Кроме того, легко видеть (хотя

бы из соображений размерностей), что элемент тока можно записать в виде $I\Delta l = qv$. Тогда магнитное поле в точке P будет таким:

$$B_\phi \sim \frac{qv_x h}{r^3} = \frac{qv_x h}{(h^2 + (v_x t)^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Здесь мы выбрали отсчет времени t таким образом, что значение $t = 0$ соответствует тому моменту, когда НЛО находится прямо над головой наблюдателя; значит, его приближение соответствует отрицательным значениям t , а удаление – положительным.

Качественная зависимость магнитного поля от времени показана на рисунке 3 сплошной линией.

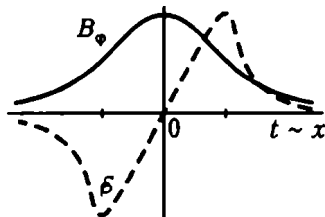


Рис. 3

Итак, индукция B_ϕ зависит от времени! А это значит, что, расположив проволочную рамку вокруг точки P , мы можем зарегистрировать изменение магнитного поля. Почему? Об этом говорит другой знаменитый закон – закон Фарадея: если изменяется поток магнитной индукции через площадь фиксированного контура, то в последнем наводится электродвижущая сила индукции, пропорциональная скорости изменения этого потока:

$$\delta = - \frac{\Delta(B_\phi S)}{\Delta t}, \quad (4)$$

где S – площадь рамки. Знак «минус» свидетельствует еще об одном замечательном факте, способствующем устойчивости Природы: всякая попытка что-то изменить вызывает противодействие. Вот и индуцированная ЭДС такова (см. рис.3), чтобы созданный ею ток порождал магнитное поле, противоположное внешнему растущему полю B_ϕ , вызванному приближающимся НЛО.

Для численных оценок надо еще уточнить систему единиц и сказать, чему равен электрический заряд НЛО.

Чтобы в предыдущих соотношениях заменить знак пропорциональности на знак равенства, нужно, перейдя к современной Международной системе единиц (СИ), ввести множитель $\mu_0/(4\pi)$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Аналогично, в выражение для напряженности электрического поля точечного заряда q входит множитель $1/(4\pi\epsilon_0)$, содержащий электричес-

кую постоянную $\epsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) \text{ Ф/м} :$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} . \quad (5)$$

Отметим великолепный факт: если разделить друг на друга упомянуть два множителя, получим

$$\frac{1/(4\pi\epsilon_0)}{\mu_0/(4\pi)} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2 = (3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 = c^2$$

– квадрат скорости света в вакууме! Все это не случайно и достойно глубоких размышлений...

Но что же НЛО? Если он движется в атмосфере Земли, можно оценить его максимальный заряд. Известно, что в сухом воздухе напряженность электрического поля, при которой возникает пробой, равна $E_{\max} \sim 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$. Подставляя это значение в равенство (5), получим оценку для наибольшего значения электрического заряда, который еще не стекает с шарообразного НЛО:

$$q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 a^2 E_{\max} .$$

Собрав все это вместе и (кто может) продифференцировав выражение (4), получим

$$\delta = \frac{3\mu_0}{4\pi} Sqhv_x^3 \frac{t}{(h^2 + (v_x t)^2)^{5/2}} . \quad (6)$$

Но и без дифференцирования можно качественно описать, как изменяется ЭДС индукции в контуре со временем (см. рис.3, пунктир): $\delta = 0$ при $t = 0$ и достигает самых больших значений в тех точках, где временная зависимость $B_\Phi(t)$ имеет наибольший наклон.

Тут уже исчерпаны основные физические идеи, и можно заняться численными оценками. Но предоставим эту работу заинтересованным (как мы надеемся) читателям.

Мы же заметим, что необязательно располагать виток проводки в плоскости полета НЛО. Можно его положить на землю горизонтально где-то сбоку. На рисунке 2 слева изображен такой виток в частном случае – на траверзе пролетающего НЛО. Он тоже пронизывается нормальной составляющей магнитного поля, которая тоже зависит от времени и, значит, тоже порождает ЭДС индукции в контуре.

Тут пора сказать слова типа «Минздрав предупреждает»: «Шутки с НЛО так же плохи, как шутки с черной магией. Это

явление делает своими жертвами неврастеников, легковверных и незрелых людей. Легкое любопытство к НЛО может превратиться в разрушительную одержимость... Школьные учителя и другие взрослые не должны поощрять подростков в их увлечении этим предметом» (Джон Киль). Или вот еще: «Что касается так называемых наблюдений за летающими тарелками, то мне кажется, что вероятность психопатологических реакций или индивидуальной, или коллективной истерии... значительно выше, чем вероятность визита инопланетян» (Жан Клод Пекер).

Но при чем тут фантастический НЛО? Разве сверхзвуковой ночной бомбардировщик не является неопознанным летательным аппаратом? Его не видно (ночь) и не слышно (он опережает звук), а включать активные локационные установки нежелательно из-за возможных «точных ударов», которыми кичатся современные реальные НЛО-навты. А ведь самолет тоже может нести электрический заряд, так что все рассмотренное выше применимо и в этом случае.

Но пусть даже самолет не заряжен электрически – достаточно того, что он движется в магнитном поле Земли. Это поле качественно изображено на рисунке 4. Видно, что оно имеет вертикальную (радиальную) составляющую B_y . Значит, при движении со скоростью v_x в этом поле на положительный элементарный заряд e действует сила Лоренца, равная $F_z = ev_x B_y$ и приводящая к возникновению горизонтального (перпендикулярного к B_y) электрического поля, равного $E_z = v_x B_y$ (здесь индексы указывают направления всех четырех векторов: \vec{v} , \vec{B} , \vec{E} и

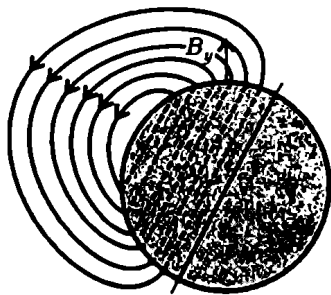


Рис. 4

\vec{F}). Значит, при размахе крыльев L между концами самолета возникнет разность потенциалов $U = v_x B_y L$.

Поскольку вблизи географического северного полюса находится южный магнитный полюс, нормальная составляющая магнитного поля Земли в северном полушарии положительна. Легко видеть, что при этом правое крыло самолета будет заряжено положительно, а левое – отрицательно. (В южном полушарии – все наоборот.) Таким образом, даже в случае электронейтрального самолета концы его крыльев приобретут заряды $\pm q$, одинаковые по величине и противоположные по знаку. Вследствие движения самолета, этим зарядам можно

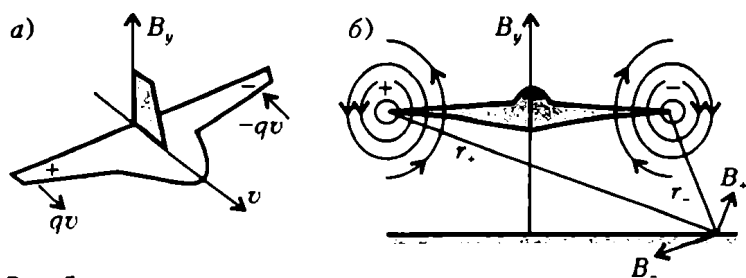


Рис. 5

поставить в соответствие элементы тока $\pm qv$ (рис.5,а). Каждый из них породит свое магнитное поле, так что в результате получим магнитный диполь (рис.5,б). Линии индукции магнитного поля диполя могут иметь вертикальную составляющую, пронизывающую находящийся на земле проводочный контур и порождающую (вследствие своего изменения во времени) в этом контуре ЭДС.

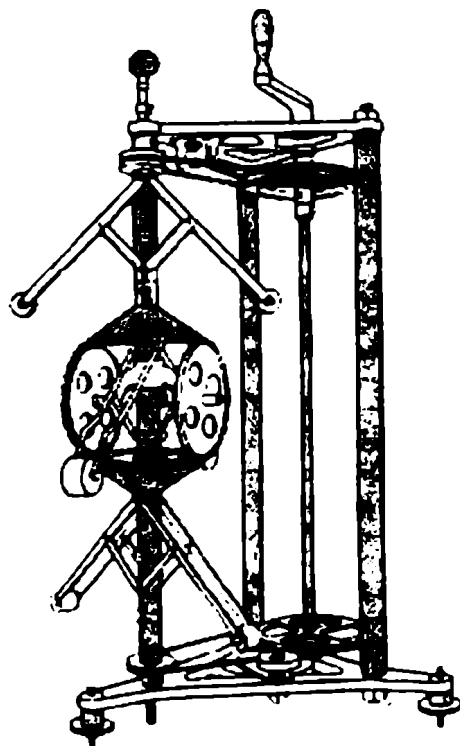


Рис. 6

Конечно, это дипольное поле будет слабее поля движущегося заряда (оно убывает пропорционально r^{-3} , а не r^{-2}); тем не менее, физика указывает на принципиальную возможность зарегистрировать движущийся объект. Остается купить в ближайшем ларьке микроамперметр (еще лучше наноамперметр, еще лучше... – тут-то и понадобятся численные оценки) и включить его в контур. И тогда ни один НЛО не подберется к вам незамеченным.

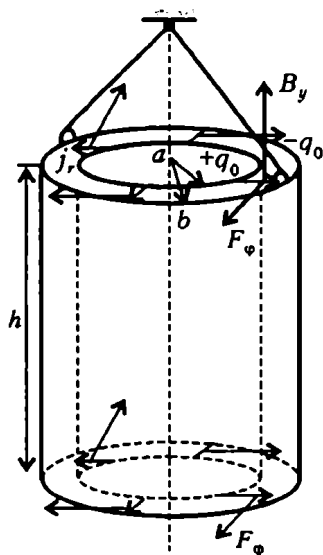
Если вам здесь не все понятно – не расстраивайтесь. Даже великие ученые не сразу поняли смысл уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные явления. Например, Людвиг Больцман в своих попытках объяснить эти явления изобразил для своих слушателей довольно сложную механическую модель (рис.6). Сейчас нам незачем разбираться в принципе работы этой машины, просто полюбуемся ею как историческим курьезом – и, испытывая свои трудности в понимании законов физики, вы почувствуете себя в приличной компании.

ЗАЧЕМ БЫТЬ КОНДЕНСАТОРУ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ?

Мы определенно вошли здесь в область, где материя и энергия кажутся слитыми воедино, в темную область между известным и неизвестным... Здесь, по моему мнению, сосредоточены окончательные реальности, тончайшие, определяющие, таинственные.

Уильям Крукс

Так уж повелось издавна, что в конденсаторе, этом хранителе зарядов, существует электрическое поле, а в катушке с током – магнитное. Но повесить конденсатор в магнитном поле – такое могло прийти в голову только очень Любопытному ребенку. И не зря – он узнал нечто новое.



А дело было так. Смастерил Любопытный ребенок конденсатор из двух длинных коаксиальных цилиндров с мало отличающимися радиусами a и b , так что их разность, т.е. ширина зазора $b - a = l$ много меньше любого из этих радиусов ($l \ll a < b$), да и повесил его вертикально в вертикальном же магнитном поле \vec{B}_y , причем так, что конденсатор мог вращаться вокруг своей оси совсем без трения (см. рисунок).

На внутренний цилиндр он поместил положительный заряд $+q_0$, на внешний – отрицательный $-q_0$. В результате между обкладками конденсатора возникло радиальное электрическое поле E_r . Да вот беда: конденсатор оказался заполненным веществом, обладаю-

Опубликовано в «Кванте» №5 за 1998 год.

щим электропроводностью, так что началась утечка заряда и возник радиальный электрический ток. Но на каждый заряд e_0 , движущийся поперек линий магнитного поля, действует, как известно, сила Лоренца, перпендикулярная обоим векторам – скорости заряда \vec{v}_r и индукции магнитного поля \vec{B}_y , а значит, направленная по касательной к окружности, и равная

$$F_\phi = e_0 v_r B_y$$

(индексы у букв как раз и подчеркивают взаимную перпендикулярность этих трех векторов).

Если концентрация движущихся зарядов n , то на единицу объема будет действовать сила, ее можно назвать *объемной плотностью силы*,

$$f_\phi = n F_\phi = n e_0 v_r B_y.$$

Поскольку эта сила направлена по касательной, то весь конденсатор начнет вращаться. Цилиндрический слой вещества между обкладками конденсатора и связанные с ним обкладки будут ускоряться в своем вращательном движении под действием суммарной силы, действующей на весь объем $2\pi a l h$ и равной

$$f_\phi \cdot 2\pi a l h = n e_0 v_r B_y \cdot 2\pi a l h$$

(тут-то Любопытному ребенку и пригодилось предположение о тонкости зазора между обкладками конденсатора – а то пришлось бы интегрировать по объему).

Итак, уравнение второго закона Ньютона, описывающего ускоренное вращательное движение конденсатора (пусть его масса m) можно записать в виде

$$m \frac{dv_\phi}{dt} = (n e_0 v_r) (2\pi a h) \cdot l B_y.$$

Выражение в первой скобке – это плотность тока:

$$j_r = n e_0 v_r,$$

а во второй – площадь обкладок:

$$S = 2\pi a h$$

(она почти одинакова для обеих обкладок, опять же в силу малости зазора между ними). Но если плотность тока умножить на поперечную площадь, получится полный ток: $I = j_r S$. Таким образом,

$$d(v_\phi m) = l B_y (I dt).$$

Снова не напрасно появились скобки. В скобках справа заключено изменение положительного заряда на внутренней обкладке:

$$dq = -Idt$$

(знак «минус» указывает на тот факт, что положительный радиальный ток уменьшает положительный заряд). Получилось, что приращение импульса конденсатора во вращательном движении $d(mv_\phi)$ пропорционально убыли заряда конденсатора. Значит, когда конденсатор полностью разрядится, его «вращательный» импульс достигнет максимальной возможной величины

$$mv_\phi = IB_y q_0.$$

Образованный физик предпочел бы (в случае вращательного движения) говорить не об импульсе (поскольку центр масс конденсатора остается в покое), а о *моменте импульса*. Он умножил бы силу и импульс силы на плечо a (расстояние до оси вращения) и получил бы совсем грамотное уравнение

$$mv_\phi a = aIB_y q_0$$

для момента импульса конденсатора. Но дело не в этой тонкости (тем более, что Любопытному ребенку многое простительно). Возникает вопрос: откуда взялся вращательный импульс (или момент импульса) у конденсатора, который первоначально покоился? Ведь, согласно фундаментальным законам физики, эти величины не могут уничтожаться или возникать из ничего. Вывод один: они раньше принадлежали электромагнитному полю. В начальный момент конденсатор покоился, но существовали поля E , и B_y . По мере разрядки конденсатора уменьшалось электрическое поле, и момент импульса электромагнитного поля постепенно переходил к ускоряющемуся (во вращательном движении) конденсатору. Наконец, электрическое поле исчезло совсем, и вместе с этим перестало существовать электромагнитное поле (осталось только магнитное), а конденсатор приобрел наибольшую угловую скорость.

Оказывается, — сказал себе Любопытный ребенок, — *электромагнитное поле обладает атрибутами механики: плотностью импульса и момента импульса!*

ПРЕДЕЛЫ ЗОРКОСТИ ПРИБОРОВ

«Мистер Лунд подошел к телескопу и начал смотреть на луну...

– А не видите ли вы бледных пятен, движущихся возле луны?..

– Черт возьми, сэр! Называйте меня ослом, если я не вижу этих пятен! Что это за пятна?

– Это пятна, которые видны в один только мой телескоп. Довольно! Оставьте телескоп!

...Через полчаса мистер Вильям Болваниус, Джон Лунд и шотландец Том Бекас летели уже к таинственным пятнам на восемнадцати аэростатах.

...Кто из читателей восплает желанием ближе познакомиться с мистером Вильямом Болваниусом, тот пусть прочтет его замечательное сочинение «Существовала ли луна до потопа? Если существовала, то почему же и она не утонула?»... Между прочим, там описывается, как он прожил два года в австралийских камышах, где питался раками, тиной, яйцами крокодилов и ... изобрел микроскоп, совершенно сходный с нашим обыкновенным микроскопом...» (А.П.Чехов. «Летающие острова»).

Действительно, среди многочисленных приборов, изобретенных физиками, широкую известность получили телескоп и микроскоп. Один из них устремлен в глубины Вселенной, другой позволяет рассматривать всякую мелочь буквально «под носом». Обсудим вкратце, как они работают.

С точки зрения геометрической оптики, с телескопом все просто. Есть две соосные линзы с фокусными расстояниями $F_{об}$ у объектива и $F_{ок}$ у окуляра (рис.1). Лучи, идущие от каждой из двух рассматриваемых звезд – направления 1 и 2, – почти параллельны и, по определению фокусного расстояния, после объектива они должны собраться в двух точках В и К, лежащих в фокальной плоскости объектива. Но в телескопической системе это одновременно и фокальная плоскость окуляра, поэтому, пройдя через окуляр, лучи должны выйти тоже двумя парал-

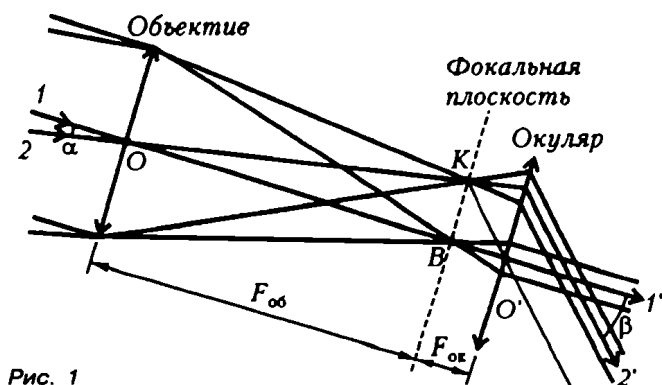


Рис. 1

тельными пучками с осями $1'$ и $2'$. Угол между входящими лучами 1 и 2 (направлениями на две звезды) обозначим через α , а угол между выходящими лучами – через β . Легко видеть, в чем «фокус» такой телескопической системы. Из прямоугольных треугольников OBK и $O'BK$ видно, что их общий катет равен

$$BK = F_{об} \operatorname{tg} \alpha = F_{ок} \operatorname{tg} \beta.$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} \approx \frac{\beta}{\alpha} \quad (1)$$

(последнее приближенное равенство записано для случая малых углов, который обычно и реализуется на практике).

Полученное соотношение открывает, казалось бы, неограниченные возможности для увеличения телескопа: нужно брать как можно более длиннофокусный объектив (вот почему оптические телескопы-рефракторы такие длинные) и как можно более короткофокусный окуляр. Но тут вмешивается еще один характерный размер – длина волны λ . Как же иначе? Ведь свет – это электромагнитные волны в диапазоне $0,4 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 0,8 \text{ мкм}$. А любая волна, проходя у препятствия, дифрагирует. Более того, любой участок первичной волны (например, в плоскости объектива), согласно принципу Гюйгенса – Френеля, можно считать источником вторичных волн, которые затем интерferируют друг с другом всюду, где встретятся, например – в фокальной плоскости объектива.

Проведем при помощи этого принципа приближенное рассмотрение дифракции света (от одной звезды) на объективе телескопа. Разобьем объектив условно на две половины (рис.2,а) и будем считать, что обе они являются источниками вторичных

волн. Если принять расстояние между точками C и C' равным половине диаметра D объектива, то разность хода волн, пришедших от них в точку M , будет приблизительно равна (см. выделенный треугольник на рисунке 2,б)

$$\Delta = \frac{D}{2} \sin \theta.$$

И результат их интерференции будет определяться значением этой разности. Например, в точке B (да и на всей оптической оси OB) имеем $\theta = 0$ и $\Delta = 0$; значит, эти две волны будут усиливать друг друга, так что в фокусе объектива (если туда поставить пластинку, перпендикулярную оптической оси) будет светлое пятно.

Можно уточнить этот результат, считая, что точки C и C' соответствуют центрам тяжести каждой из половин объектива. Нетрудно показать, например, сделав полукруг из картона и уравновесив его на лезвии ножа, или посмотреть в справочнике, что центр масс полукруга находится на высоте $y_C = \frac{4}{3\pi} \frac{D}{2}$ над его диаметром. Значит, разность хода Δ двух сферических волн, исходящих из этих точек под углом θ к оптической оси, будет равна

$$\Delta = 2y_C \sin \theta = \frac{8}{3\pi} \frac{D}{2} \sin \theta. \quad (2)$$

Будем теперь перемещать вверх (или вниз) точку наблюдения в фокальной плоскости. Тогда угол θ будет расти, а вместе с ним будет расти разность фаз Δ . Очень важно найти, при каком значении угла θ_{\min} эта разность хода станет равной $\Delta_{\min} = \frac{\lambda}{2}$, так что волны погасят друг друга. Из выражения (2) имеем

$$\sin \theta_{\min} = \frac{3\pi \lambda}{8 D} = 1,18 \frac{\lambda}{D} = \theta_{\min}.$$

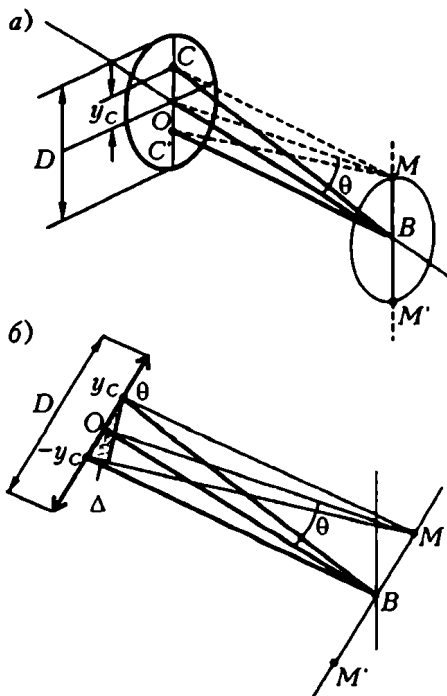


Рис. 2

Конечно, принцип Гюйгенса — Френеля предписывает складывать элементарные возмущения от малых площадок первичной волны (т.е. интегрировать). При этом нам пришлось бы иметь дело с так называемыми функциями Бесселя, которые в случае осевой симметрии являются аналогами «обычных» синусов и косинусов, характерных для одномерных задач (например, струны гитары). И тогда получился бы более точный результат:

$$\sin \theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (3)$$

Видно, что наше грубое рассмотрение всего лишь на четыре процента отличается от более точного — не так уж и плохо. Но почему для нас так важен этот угол? Потому что он дает радиус первого темного кольца $BM = F_{\text{ок}} \cdot \theta_{\min}$, окружающего светлое пятнышко — изображение звезды в фокальной плоскости объектива. Получается, что это вовсе не точка, как утверждает

геометрическая оптика. Значит, вторая звезда с угловым расстоянием α от оптической оси тоже даст светлое пятнышко в фокальной плоскости, и теперь все дело в том, насколько далеко оно окажется от изображения первой звезды. Великий Рэлей предложил простой критерий: должно быть

$$\alpha \gtrsim \theta_{\min}, \quad (4)$$

иначе изображения двух звезд наложатся друг на друга уже в фокальной плоскости объектива, и далее никакими ухищрениями их не разделить.

Но оторвемся от звезд и заглянем в микроскоп. Обычное построение изображений предмета в объективе и окуляре (в приближении тонких линз) дано на рисунке 3. Тут существенно, чтобы предмет находился за фокусом объектива — тогда изображение I' будет действительным, а это изображение чтобы находилось между окуляром и его фокусом — тогда окончательное изображение I'' будет мнимым.

Геометрическая оптика дает для увеличения микроскопа следующее выражение (см. рис.3):

$$\frac{X}{x} = \frac{D_o \delta}{F_{\text{ок}} F_{\text{об}}},$$

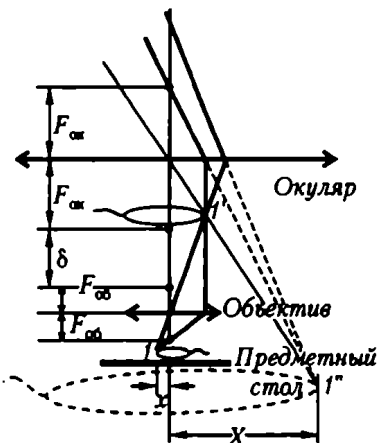


Рис. 3

где δ – расстояние между фокусами объектива и окуляра, D_0 – так называемое расстояние наилучшего зрения. Увеличение микроскопа может быть значительным. Например, для характерных значений $F_{об} = 2$ мм, $F_{ок} = 15$ мм, $\delta = 160$ мм и $D_0 = 250$ мм получим $X/x = 1335$.

Казалось бы, и это не предел – надо лишь делать линзы все более совершенными геометрически (шлифовать), устранять их недостатки (апланатизм, астигматизм, хроматическую и сферическую aberrации, дисторсию...) – и все будет в порядке. Но и тут вмешалась все та же λ !

Теорию разрешающей способности микроскопа разработал Аббе. Он предложил рассмотреть в микроскоп дифракционную решетку (рис.4). Какую минимальную информацию можно получить об этой решетке? Конечно, прежде всего можно узнать ее период d .

Как известно, при прохождении через решетку света с длиной волны λ должен получиться набор дифракционных максимумов. Если свет падает на решетку под углом θ_0 , то направление на эти максимумы определяется условием

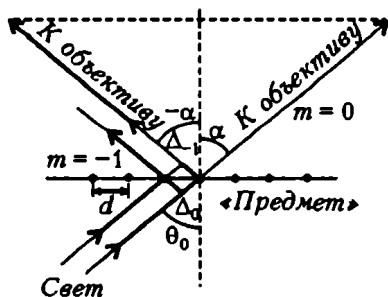


Рис. 4

$$\Delta_m - \Delta_0 = d \sin \theta_{m \max} - d \sin \theta_0 = m\lambda. \quad (5)$$

Чтобы микроскоп дал информацию о периоде d , в его объектив должны прийти по крайней мере два луча, соответствующих двум соседним максимумам дифракционной картины, например $m = 0$ и $m = -1$. Именно такой предельный случай $\alpha = \theta_0$ и $-\alpha = \theta_{-1 \max}$ изображен на рисунке 4. Заметим, что период решетки d , который мы стремимся рассмотреть, конечно, очень мал – порядка микрометров. В этом масштабе объектив микроскопа и его фокусное расстояние (порядка миллиметров) таковы, что сам объектив нужно было бы изобразить далеко за пределами рисунка (порядка метров); поэтому он показан лишь условно (а идущие к нему от узлов решетки лучи почти параллельны).

Итак, из условия (5) получим $2d \sin \alpha = \lambda$ (α называется апертурным углом). Значит, при заданной длине волны подсветки наименьший период решетки, который можно «рассмотреть» в микроскоп, равен $d_{\min} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$. Можно еще облегчить дело:

если между решеткой и объективом поместить среду с коэффициентом преломления n (например, капнуть какую-либо жидкость), то увеличится оптическая разность хода (ведь в этой среде скорость света и длина волны станут в n раз меньше). В результате получим

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha}. \quad (6)$$

Теперь сравним разрешающие способности телескопа и микроскопа. Получается, что мы выдвигаем прямо противоположные требования:

для телескопа $\frac{\lambda}{D} \approx \alpha_{\min}$ желательно делать как можно меньше;

для микроскопа $\frac{\lambda}{d} \approx 2n \sin \alpha$ желательно делать как можно больше.

Отсюда понятно стремление строить телескопы с возможно большим диаметром входного «зрачка», а микроскопы – с возможно меньшим фокусным расстоянием объектива (чтобы $\sin \alpha$ был как можно ближе к единице), при этом пространство между объективом и предметом наблюдения следует заполнить жидкостью с возможно большим показателем преломления n (так называемая иммерсионная техника).

Что же достигнуто человечеством?

Самый большой диаметр объектива оптического телескопа $D \sim 6$ м. Для «средней» длины волны света $\lambda \sim 0,6$ мкм из выражений 3 и 4 будем иметь $\alpha_{\min} \sim 10^{-7}$. Принимая радиус Вселенной $R \sim 10^{26}$ м, для двух разрешимых точек на ее «границе» получим

$$l_{\min} \sim R \alpha_{\min} = 10^{19} \text{ м}.$$

В случае микроскопа положим $\sin \alpha \leq 1$, $n \approx 1,6$ (коэффициент преломления анилина). Тогда из равенства (6) найдем

$$d_{\min} \geq \frac{\lambda}{4} \sim 0,1 \text{ мкм} = 10^{-7} \text{ м}.$$

Таковы характерные пределы возможностей этих замечательных оптических приборов.

ВОЛНЫ НА ПЛЯЖЕ, СОЛНЦЕ В НЕБЕ И МНОГОЕ ДРУГОЕ

Гляди в оба!

Народная мудрость

Рыба анаблепа живет на поверхности воды. Ее глаз разделен на два сектора: верхний видит в воздухе, нижний – в воде. Одним взглядом анаблепа замечает сразу и птиц в небе, и рыб в водоеме.

Из научной книги

Конечно, почти всякая рыба имеет некоторое отношение к волнам и пляжам. Но не в этом дело. А дело в том, что хотелось бы понять, почему на пляжах волны всегда бьются о берег параллельно ему, откуда бы не дул ветер и как бы волны не были направлены в открытом море. Иначе говоря, почему линии, перпендикулярные гребням волн, т.е. их лучи, искривляются так, что к берегу они подходят под прямым углом.

Оказывается, это имеет прямое отношение к преломлению луча света при переходе из одной среды в другую, скажем из воздуха в воду. Тут все понятно: в воздухе свет распространяется со скоростью v_1 , в воде – с меньшей скоростью v_2 ($v_2 < v_1$), их отношение называется показателем (коэффициентом) преломления воды относительно воздуха

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} > 1,$$

а из закона преломления

$$n_2 \sin \alpha_2 = n_1 \sin \alpha_1, \quad (1)$$

описанного в школьном учебнике (правда в несколько ином виде), следует, что при переходе в оптически более плотную среду (при $n > 1$) преломленный луч пойдет ближе к нормали, чем падающий, т.е. $\alpha_2 < \alpha_1$.

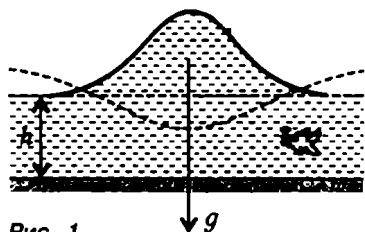


Рис. 1

Как можно убедиться, вывод этого закона не зависит от физической природы волны (и это нам пригодится в дальнейшем).

Найдем прежде всего скорость распространения волн на пляже. От чего она может зависеть? Если мы создадим «горб» на поверхности спокойной воды — моря, озера или лужи — глубиной h (рис. 1) и предоставим его самому себе, то под действием силы тяготения (пропорциональной ускорению свободного падения g) он начнет проваливаться вниз, а вследствие инерции проскочит положение, соответствующее спокойной поверхности, рядом возникнут другие «горбы», и начнет распространяться волна.

Перечислим величины (и их размерности), от которых, по нашему мнению, может зависеть искомая скорость движения волны $v \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$:

$$h(\text{м}), \quad g \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

Из соображений размерностей сразу видно, что их можно связать формулой (проверьте)

$$v = \sqrt{gh}. \quad (2)$$

Таким образом, чем мельче водоем, тем с меньшей скоростью распространяется волна (разумеется, это справедливо только для мелкой воды, когда скорость не зависит от длины волны). Значит, с приближением к берегу и уменьшением глубины водоема волны движутся все медленнее. По аналогии с оптикой, можно сказать, что они переходят во все более оптически плотную среду. (Кстати, и в стакане с водой тоже можно создать

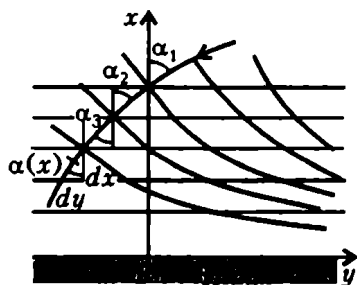


Рис. 2

среду с показателем преломления, плавно растущим по направлению к его дну, если сделать очень концентрированный раствор соли, а затем осторожно, избегая перемешивания слоев, добавлять к нему все менее соленые слои и, наконец, чистую воду (попробуйте!). Тогда подводная часть ложки будет выглядеть не преломленной, а плавно изогнутой.)

Разобьем мысленно поверхность моря на полосы шириной dx , параллельные берегу (рис.2). В каждом слое будет своя глубина h , своя скорость распространения волны, свой показатель преломления, обратно пропорциональный этой скорости, и свой угол по отношению к оси x , перпендикулярной берегу. Тогда закон преломления (1) для всех этих слоев можно записать в виде

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{h_1}} = \frac{\sin \alpha_2}{\sqrt{h_2}} = \dots = \frac{\sin \alpha(x)}{\sqrt{h(x)}} = \text{const}.$$

Уже отсюда видно, что если глубина стремится к нулю, то угол между лучом и нормалью тоже стремится к нулю. Это и объясняет, почему волны на пляжах «плюхают» прямо в берег. Но можно пойти и дальше – найти само уравнение луча.

Исходя из рисунка 2, запишем

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg} \alpha(x) = \frac{\sin \alpha(x)}{\cos \alpha(x)} = \frac{\sin \alpha(x)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha(x)}}.$$

Воспользуемся выражением (3), и мы получим связь между наклоном волны по отношению к нормали на любом расстоянии x от берега и значением α_1 на каком-то фиксированном расстоянии x_1 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{h/h_1} \sin \alpha_1}{\sqrt{1 - (h/h_1) \sin^2 \alpha_1}}. \quad (4)$$

А теперь осталось только «назначить» зависимость глубины от расстояния до берега $h(x)$ – и интегрируйте себе на здоровье! Ну например, возьмем квадратичный закон $h = h_1 (x/x_1)^2$. Тогда получим

$$\int_{y_1}^y dy = y - y_1 = \int_{x_1}^x \frac{(x/x_1) \sin \alpha_1}{\sqrt{1 - (x/x_1)^2 \sin^2 \alpha_1}} dx.$$

Можно спросить у математиков, как вычислить этот интеграл. А можно и попробовать самим. Сделаем такую замену переменной:

$$1 - \left(\frac{x}{x_1} \right)^2 \sin^2 \alpha_1 = \gamma$$

и продифференцируем:

$$2 \frac{dx}{x_1} \frac{x}{x_1} \sin^2 \alpha_1 = -d\gamma.$$

Подставляя все это в подынтегральное выражение, получим

$$\frac{y - y_1}{x_1 / \sin \alpha_1} = -\frac{1}{2} \int_{y_1}^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} \Big|_{y_1}^y = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}.$$

Это уже и есть искомая зависимость – уравнение луча $y(x)$. Но как бы назвать эту кривую? Перенесем первое слагаемое в правой части влево, возведем обе части в квадрат, а затем оставим справа только единицу:

$$\left(\frac{y - y_1}{x_1 / \sin \alpha_1} - \cos \alpha_1 \right)^2 + \left(\frac{x}{x_1 / \sin \alpha_1} \right)^2 = 1.$$

Да ведь это уравнение окружности! (Разумеется, при другой зависимости глубины от расстояния получится иное уравнение луча.)

Однако пойдем дальше. Уравнение (1) объясняет множество других явлений природы.

Например, атмосферную рефракцию солнечных лучей (рис.3). Поскольку плотность атмосферы растет по направлению к поверх-

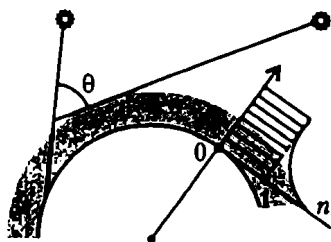


Рис. 3

ности Земли, коэффициент преломления воздуха падает с высотой, и лучи Солнца изгибаются так, что наблюдатель на Земле видит его еще некоторое время после геометрического захода и перед восходом. В результате световой день удлинится на несколько минут, что очень полезно (для колхозных полей, например). Благодаря этому же явлению в высоких широтах полярная «ночь» короче полярного «дня», что тоже очень хорошо.

Этим же уравнением можно объяснить и миражи в пустыне. Когда раскаленный песок подогревает прилежащий слой возду-

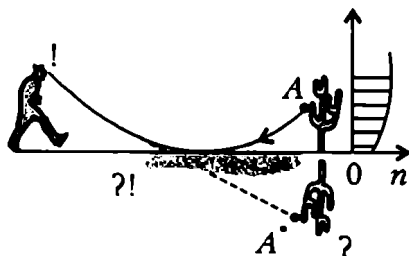


Рис. 4

ха, реализуется ситуация, при которой показатель преломления верхнего слоя больше, чем нижнего. В результате лучи, идущие, например, из точки A (рис.4), изгибаются кверху, так что усталый путник принимает точку A' за отражение в столь желанном озере, которого, увы, нет.

Кстати, о рыбе. Пусть даже не об упомянутой анаколе, а о самой простой. Показатель преломления ее среды обитания – воды – заметно больше единицы ($n \approx 4/3$). Но для того чтобы фокусировать лучи, коэффициент преломления ее глаз должен быть еще больше. Что же, природа должна создавать рыбий глаз из кронгласа или флинта? Это вопрос нетривиальный, и как он решен Природой – об этом можно поговорить или почитать отдельно. Здесь интересно вспомнить, что знаменитый физик Максвелл придумал такой инструмент (он назвал его «рыбьим глазом»), который представляет собою неограниченную среду с показателем преломления, зависящим только от расстояния (r) до фиксированной точки:

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + (r/a)^2}$$

(n_0, a – постоянные). Можно показать, что в такой среде световой луч имеет форму окружности независимо от того, из какой точки и в каком направлении он вышел.

Это все оптика. Но то же самое и в акустике – уравнение (1) описывает общее свойство лучей для волн любой природы загигаться в сторону уменьшения скорости распространения волны. Если днем на пляже песок раскален, то скорость звука в прилегающем горячем слое воздуха несколько больше, чем вверх (она, как известно, пропорциональна корню квадратному из температуры). В результате, как и в случае оптического миража, «лучи звука» уходят вверх, и голоса на пляже звучат приглушенно. А вечером, когда земля успела уже охладиться, а воздух вверх еще теплый, возникает обратная ситуация – звуки, уходящие вверх, затем загигаются вниз, и песни далеко разносятся в поле.

Впрочем, далеко-то они слышны, а вблизи, может быть, и нет. Во время знаменитых битв, производивших много шума, иногда возникали такие атмосферные условия, при которых образовывалась зона молчания. (Конечно, в эти условия, помимо изменения скорости звука с высотой, входят и наличие облаков, и рельеф местности, и другие тонкости, о которых можно узнать при желании из книг по акустике.) Например, шум битвы при Ватерлоо был слышен на очень большом расстоянии, но не был слышен ближе, где стоял корпус наполеоновского генерала Груши, поэтому последний и не пришел на помощь своему императору. Результат известен.

Как, однако, полезно знать физику! Даже полководцам.

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА И ДВА ВЕРБЛЮДА

На каком расстоянии можно отличить двугорбого верблюда от одногорбого?

Детский вопрос

А что может помешать этой важной для народного хозяйства процедуре? Оказывается, существуют принципиальные ограничения, налагаемые физической оптикой.

Начнем по порядку. Пусть на непрозрачный экран (рис.1) слева падает широкий параллельный пучок света интенсивностью I_0 (это плотность потока энергии, измеряемая в $\text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2)$),

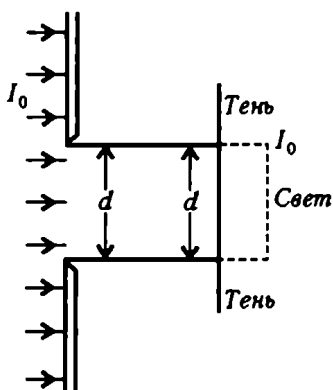


Рис. 1

а в экране имеется бесконечно длинная щель шириной d . С точки зрения геометрической оптики, за щелью образуется тоже параллельный пучок света, ширина которого на любом расстоянии от щели будет одинаковой и равной d , так что если в каком-то месте поставить перпендикулярную белую пластинку, то на ней будет видна светлая полоска той же ширины d с освещенностью I_0 (как на рисунке 1 справа).

Однако надо вспомнить, что световая волна обладает определенной пространственной структурой. Са-

мым характерным масштабом этой структуры является длина волны λ . И тут Опытный Читатель непременно воскликнет: в таком случае важную роль должно играть безразмерное отношение λ/d ! И он будет совершенно прав.

Действительно, разобьем щель на две светящиеся полуполоски шириной $d/2$. И еще: соберем мысленно всю энергию этих двух полуполосок в две бесконечные светящиеся нити, отстоящие друг от друга на $d/2$ (рис.2, слева). Тогда дело сведется к так

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1999 год.

называемой двухлучевой интерференции (напоминающей известный опыт Юнга). Посмотрим, какая картина возникнет на белой пластинке справа, находящейся на расстоянии x от щели в экране.

Прежде всего найдем разность хода $\Delta = r_2 - r_1$ от двух нитей A и B до точки с координатой y на пластинке. Из двух треугольников на рисунке 2, с учетом узости щели, имеем

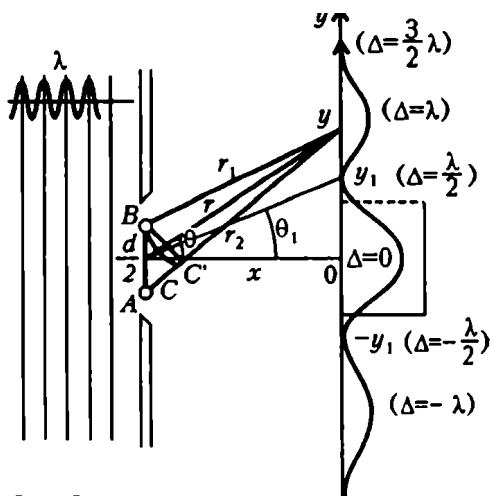


Рис. 2

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 - 2r \frac{d}{4} \sin \theta,$$

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 2r \frac{d}{4} \sin \theta.$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$r_2^2 - r_1^2 = rd \sin \theta.$$

Но левую часть (разность квадратов) можно представить в виде $(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$. Первый сомножитель и есть искомая разность хода, а второй можно приближенно записать так: $r_2 + r_1 = 2r$. Тогда

$$\Delta = \frac{d}{2} \sin \theta,$$

что можно было бы найти и сразу, если «кривосторонний» треугольник ABC приближенно заменить прямоугольным треугольником ABC' .

А теперь вспомним основную идею интерференции: если разность хода двух волн от двух источников света до одной и той же точки равна целому числу длин волн λ , то волны усилят друг друга, а если она равна нечетному числу полуволн, то эти две интерферирующие волны ослабят друг друга. Значит, на правой пластинке должна получиться вовсе не «ступенька» освещенно-

сти, изображенная на рисунке 1 приверженцем геометрической оптики, а более сложная картина чередующихся светлых и темных полос – как на рисунке 2 справа. Самая большая освещенность будет в середине пластинки, на линии, противолежащей середине щели ($y = 0$). Яркость других полос будет убывать с удалением от середины пластинки – ведь они все дальше отстоят от светящейся щели.

Для наших целей самым интересным является положение темных полос, ограничивающих центральную светлую полосу. Из вышесказанного следует, что в этом месте

$$\frac{d}{2} \sin \theta_1 = \pm \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\sin \theta_1 = \frac{\pm y_1}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} = \pm \frac{\lambda}{d}.$$

Вот тут и сбылось предвидение Опытного Читателя: действительно, распределение освещенности пластинки оказалось зависящим от важнейшего параметра – безразмерного отношения длины волны света к размеру отверстия, пропускающего свет! Это распределение называют дифракционной картиной от щели.

Но вернемся к нашим верблюдам. В этом случае «щелью» служит зрачок глаза (который вовсе не бесконечная щель, а круглое отверстие), а роль пластинки играет задняя внутренняя поверхность глаза – сетчатка. Оказывается, на ней возникнет дифракционная картина, очень похожая на изображенную на рисунке 2 справа. Только теперь, конечно, это уже не параллельные полосы, а темные и светлые кольца, окружающие центральное светлое пятно. И радиусу первой темной окружности соответствует несколько другой (большой) угол – такой, что

$$\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

где d – это уже диаметр зрачка.

Итак, каждая «точка» удаленного объекта (верблюда), пославшая в глаз почти параллельный пучок рассеянного ею солнечного света, изобразится на сетчатке в виде светлого пятнышка, окруженного системой колец. (Не напоминает ли это вам картину волн от камешка, брошенного в пруд?) Но нам нужно различить – физики говорят «разрешить» – две точки. Дифракционная картина от них качественно представлена на рисунке 3. И тут сразу понятно условие их разрешимости: если максимум освещенности от второй точки (B) попадет в первый

минимум от первой точки (А) или будет дальше от него, то эти две точки можно рассмотреть как отдельные. В противном случае они сольются в одну.

Заметим, что наиболее четкое изображение на сетчатке глаза получается при диаметре зрачка $d = 3$ мм. При этом угловая разрешающая способность глаза, определяемая законами физической оптики, имеет порядок

$$\varphi = \frac{1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ м}} \approx 50''$$

(здесь использована характерная длина волны $\lambda = 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$). Когда человек хочет хорошенько рассмотреть какой-либо объект, он поворачивает глаз так, что изображение проецируется на так называемое желтое пятно сетчатки, в котором 15000 колбочек (чувствительных клеток)

выстилают площадку с угловым размером порядка $1,5^\circ$. Таким образом, на каждую колбочку приходится угол порядка

$$\varphi_1 = \frac{1,5^\circ \cdot 3600''/^{\circ}}{\sqrt{15000}} \approx 50''.$$

Можно сказать, что, создавая глаз, «Природа знала дифракцию на отлично». Это еще один яркий пример поразительной целесообразности живых организмов.

В этой связи интересно обсудить фантастический рассказ Гулливера: «Лилипуты обладают несравненно лучшим зрением, чем мы... Природа приспособила зрение лилипутов к окружающим их предметам: они хорошо видят, но только на близком расстоянии... Мне большое удовольствие доставляло наблюдать товара, ощипывающего жаворонка величиной не больше нашей мухи, и девушку, вдевавшую шелковинку в ушко невидимой иглки». Между тем, Гулливер утверждает: «Я в двенадцать раз выше лилипута», и все предметы в Лилипутии во столько же раз меньше наших (в том числе и зрачок глаза). Таким образом, дифракционный угол для лилипута в 12 раз больше, так что диаметр изображения точки на сетчатке маленького глаза растягивается во столько же раз больше. Целесообразно ли при этом Природе создавать клетки лилипутского глаза меньше, чем у

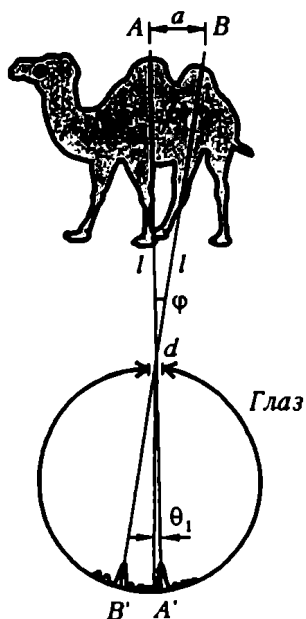


Рис. 3

Гулливера? И будет ли при этом их зрение «несравненно лучше», даже на «близком расстоянии»?

Таким образом, для разрешимости двух точек нужно потребовать выполнения приближенного соотношения

$$\varphi \geq \theta_1, \text{ или } \frac{a}{l} \geq 1,22 \frac{\lambda}{d}, \text{ откуда } l \leq \frac{ad}{1,22\lambda}. \quad (*)$$

Остается провести численные оценки. Пусть расстояние между горбами верблюда $a \sim 0,5$ м, диаметр зрачка $d \sim 1$ мм (в пустыне яркий свет!), средняя длина волны солнечного света $\lambda \sim 0,5$ мкм. Тогда

$$l \leq \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} \text{ м} \sim 800 \text{ м}.$$

Но разве дело только в верблюдах? А телескопы? Ведь объектив телескопа – тоже «зрачок», только очень большой. И теперь ясно, почему его стараются сделать как можно больше: наименьшее угловое расстояние на небесной сфере между двумя звездами φ , которые мы хотим разрешить, должно быть не меньше чем θ_1 .

А что если привинтить к телескопу микроскоп? Казалось бы, если каждый из этих приборов увеличивает в тысячу раз, то такое устройство могло бы увеличивать в миллион раз, так что можно было бы рассматривать камешки на Марсе? Увы, дифракция света на объективе телескопа уже безнадежно испортит дело, так что информация об объектах, более мелких, чем определяемые условием Рэля (*), будет навсегда потеряна. А дифракция на объективе микроскопа? Она ведь тоже приводит к тому, что не удастся разрешить две точки, если расстояние между ними меньше длины волны излучения, освещающего наблюдаемый объект (например, микроб).

Что же получается? Выходит, эти замечательные приборы созданы для того, чтобы на их входных зрачках происходила дифракция света? Конечно, нет. Когда человечество изобретало эти приборы, оно совсем не думало о волновой природе света. Казалось, картины хода лучей, нарисованные по законам геометрической оптики, открывают неограниченные возможности для увеличения микроскопов и телескопов – подберите лишь нужные отношения фокусов объектива и окуляра и расположите их должным образом. Но, как всегда случалось в истории физики, более развитая теория (физическая оптика) указала пределы возможностей, скрытые от более простой теории (геометрической оптики).

А верблюды – это просто для интереса.

ЗАЧЕМ ЗАКРЫВАТЬ ОТВЕРСТИЕ, ИЛИ ОТКРЫТИЕ ЛИНЗЫ

Рассмотрим такую ситуацию: на непрозрачный экран с круглым отверстием нормально падает параллельный пучок света, или, что то же самое, плоская световая волна. Теперь предлагается часть площади отверстия перекрыть непрозрачным препятствием — шариком, шайбой или кольцом. Вопрос: как изменится освещенность в некоторой точке P за экраном, лежащей на оси отверстия (рис.1)? Скорее всего, любой прохожий ответит: конечно, уменьшится! И будет прав, но... не всегда и не совсем.

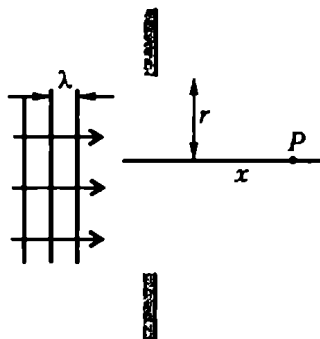


Рис. 1

Конечно, бытовая практика убеждает в том, что уменьшение площади отверстия, пропускающего свет внутрь некоторого объема, уменьшает и освещенность этого объема: ведь для того и служат плотные шторы на окнах, для того и щурят глаза при ярком свете, а зрачки и помимо нашей воли уменьшают свой диаметр.

Но принципиально важен и встречный вопрос: а каково соотношение между длиной волны λ , радиусом отверстия r и расстоянием до точки наблюдения x ? Этот вопрос связан с пониманием роли интерференции, суть которой заключается во взаимодействии двух волн, пришедших в точку

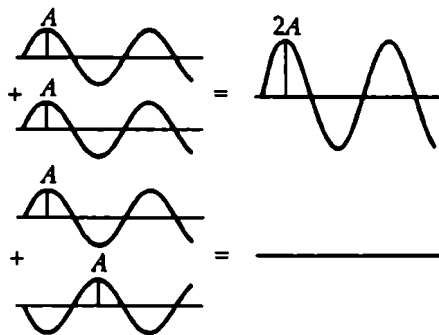


Рис. 2

наблюдения (рис.2): если эти волны пришли в одной фазе (или со сдвигом фаз, кратным 2π , что соответствует разности хода волн, равной целому числу длин волн), то их «горбы» и «впадины» складываются; если же волны придут в противофазе (или с разностью хода, равной нечетному числу полуволн), то результатом их взаимодействия в данной точке может стать взаимное уничтожение.

Чтобы понять суть дела, повторим геометрические построения, которые до нас догадался сделать Огюстен Френель еще в начале позапрошлого века. Проведем из точки наблюдения P (рис.3) несколько лучей: один из них пусть пройдет через центр

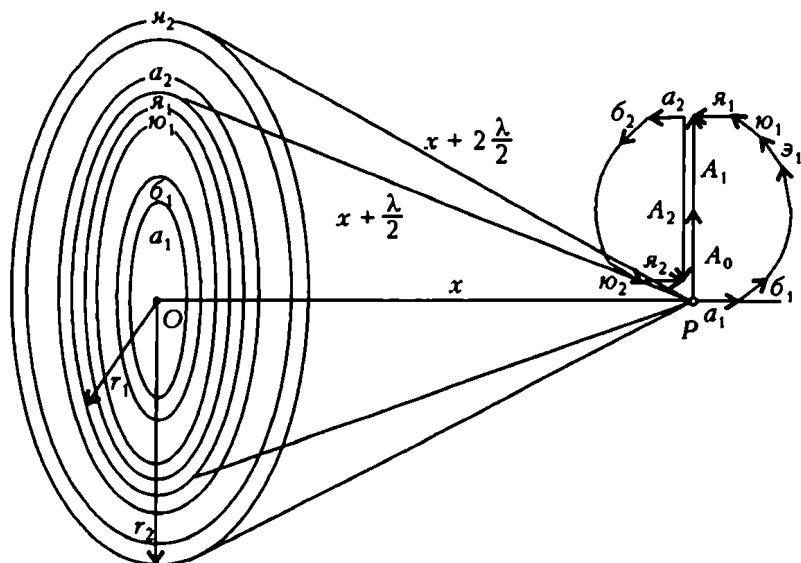


Рис. 3

отверстия, другой будет ровно на $\lambda/2$ длиннее, следующий на $\lambda/2$ длиннее предыдущего, ..., и опишем, как ножкой циркуля, каждым из этих лучей окружности в плоскости отверстия с радиусами r_1, r_2, \dots . Далее, разобьем первый круг на кольца ($a_1, b_1, \dots, z_1, y_1, a_2, b_2, \dots, z_2, y_2, \dots$) одной и той же площади. Согласно Гюйгенсу и Френелю, каждое из этих колец посылает в точку P вторичные волны (первичная волна пришла в плоскость самого отверстия), причем их амплитуды пропорциональны площадям колец (они, по построению, одинаковы), а сдвиг фаз нарастает с удалением от центра и достигает величины, соответствующей разности хода $\lambda/2$ у края зоны радиусом r_1 (так называемой

первой зоны Френеля). Этот набор слов иллюстрируется на рисунке 3 справа в виде малых векторов $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \dots, \vec{y}_1, \vec{y}_1$, имеющих (почти) одинаковую длину, но повернутых друг относительно друга на упомянутую разность фаз, причем последний вектор \vec{y}_1 по договору повернут относительно \vec{a}_1 на 180° (или π), что и свидетельствует о разности хода $\lambda/2$ между соответствующими волнами. Сумма всех этих малых векторов равна \vec{A}_1 . А почему упомянуто слово «почти»? Да потому, что кольцо y_1 все-таки дальше от точки наблюдения, чем центральный диск a_1 ; следовательно, пришедший от него в точку P сигнал будет чуть слабее.

Прделаем аналогичные построения для кольца, лежащего между окружностями с радиусами r_1 и r_2 (вторая зона Френеля). В результате сумма возмущений $\vec{a}_2, \vec{b}_2, \dots, \vec{y}_2, \vec{y}_2$, приходящих от элементов этого кольца, даст вектор \vec{A}_2 , противоположно направленный по отношению к вектору \vec{A}_1 (и несколько меньший по модулю). Таким образом, вторичные волны, пришедшие от второй зоны Френеля, почти полностью погасят те, которые пришли от первой зоны.

Уже на этом этапе почти все понятно: из отверстия радиусом r_1 в точку P придет света гораздо больше, чем из отверстия радиусом $r_2 > r_1$. Значит, уменьшив площадь отверстия, мы увеличили освещенность в точке наблюдения! Но продолжим увеличивать радиус отверстия. Достигнув трех зон Френеля, увидим, что вектор \vec{A}_3 будет почти равен вектору \vec{A}_1 , и, следовательно, освещенность в точке P возрастет. Открыв четвертую зону, мы вновь почти погасим свет в точке наблюдения; пятая зона приведет опять к росту освещенности и т.д. Когда непрозрачное препятствие полностью исчезнет, спираль (так называемая спираль Френеля) свернется в центр окружности диаметром A_1 , а в точке P останется первичная волна с амплитудой A_0 , приблизительно вдвое меньшей A_1 .

Но пора бы сделать и численные оценки. Из прямоугольного треугольника Oy_1P (см. рис.3) можно найти радиус первой зоны Френеля:

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\lambda x + \frac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{\lambda x} \quad (1)$$

(здесь мы пренебрегли малой величиной $\lambda^2/4$, считая, что расстояние от отверстия до точки наблюдения много больше

длины волны, т.е. $x \gg \lambda$). Аналогично найдем

$$r_2 = \sqrt{2\lambda x}, \quad r_3 = \sqrt{3\lambda x}, \quad \dots, \quad r_m = \sqrt{m\lambda x}. \quad (2)$$

(Отметим здесь замечательный факт: площадь круга, лежащего в плоскости отверстия, пропорциональна разности длин лучей, проведенных из точки P к окружности и к центру. Причем это верно не только для дискретных значений этой разности $(\frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots, m\frac{\lambda}{2})$, но и для любых значений. Этот факт и был использован выше при построении элементарных возмущений $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \dots, \vec{y}_1$: именно благодаря тому что одинаковым приращениям площади соответствуют одинаковые приращения длины луча, векторы возмущений на рисунке 3 образуют полуокружность.)

Пусть отверстие в непрозрачном экране имеет, например, радиус $r = 1$ мм, а длина волны, падающей на него, равна $\lambda = 0,5$ мкм. Тогда, согласно формуле (1), заданное отверстие представляет собою одну первую зону Френеля ($r_1 \equiv r$) для точки с координатой

$$x_1 = \frac{r^2}{\lambda} = 2 \text{ м}$$

– в этой точке будет наибольшая амплитуда (и интенсивность) волны. Теперь, отправившись от точки с координатой x_1 , будем приближаться к отверстию вдоль оси. На некотором расстоянии

$$x_2 = \frac{r^2}{2\lambda} = \frac{x_1}{2} = 1 \text{ м}$$

это фиксированное отверстие будет представлять собой уже две зоны Френеля; следовательно, в этой точке почти не будет света. Чем ближе к отверстию, тем большему числу зон Френеля оно будет соответствовать. Таким образом, для всех точек с координатой $x < x_1$ суммарная амплитуда всех вторичных волн будет изображаться вектором \vec{A} , начало которого закреплено, а конец

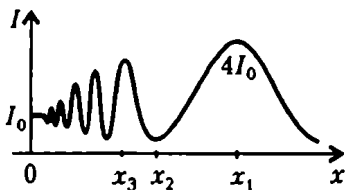


Рис. 4

движется по спирали Френеля против часовой стрелки (см. рис.3). Значит, свет и тьма будут сменять друг друга, а вблизи отверстия освещенность станет равной I_0 (соответствующей амплитуде A_0). Это изменение освещенности вдоль оси качественно изображено на рисунке 4.

А что если мы отправимся в другую сторону? Для точек с координатой $x > x_1$ амплитуда волны будет изображаться вектором, конец которого скользит по спирали Френеля по часовой стрелке. Интенсивность света будет монотонно падать, причем можно сказать, по какому закону: $I \sim 1/x^2$, так как с большого расстояния отверстие будет казаться точкой.

Только что мы рассмотрели случай отверстия фиксированного радиуса. А если, наоборот, зафиксировать точку на оси и открывать отверстие, увеличивая его радиус по некоторому переменному закону $r(t)$? Тогда, начиная от полной темноты при $r = 0$, мы сначала откроем первую зону Френеля (при этом будет самый яркий свет с интенсивностью $I_1 = 4I_0$), затем вторую (тьма), третью (свет) и так далее, вплоть до полностью открытого фронта с интенсивностью первичной волны I_0 . Иными словами, при открывании отверстия наблюдатель в фиксированной точке зарегистрирует цепую последовательность вспышек.

Но вернемся к самой спирали Френеля и обсудим, что будет, если как-то избавиться от всех четных зон, которые создают в точке P возмущения, гасящие те, которые приходят от нечетных зон. Действительно, закроем четные зоны непрозрачными кольцами (рис.5).

Тогда все векторы $\vec{A}_1, \vec{A}_3, \vec{A}_5, \dots$ выстроятся друг другу «в затылок», и их сумма даст гораздо более сильный сигнал, чем одна зона.

Но зачем же так просто терять свет от четных зон? Лучше прикроем их прозрачными (стеклянными) кольцами (рис.6), подобрав их толщину так, чтобы они «подтормаживали» свет, но не просто как-нибудь, а внося разность фаз, в точности равную нечетному числу π . А именно, пусть их толщина h такова, что

$$h(n-1) = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где n — показатель преломления этих стеклышек, а $m = 0, 1, \dots$

При этом векторы $\vec{A}_2, \vec{A}_4, \dots$

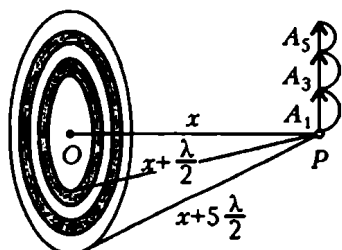


Рис. 5

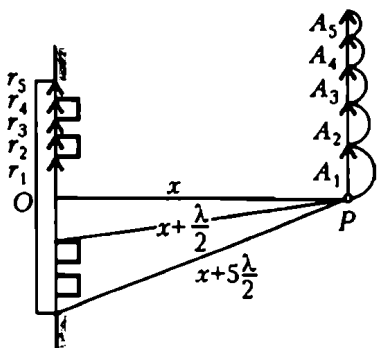


Рис. 6

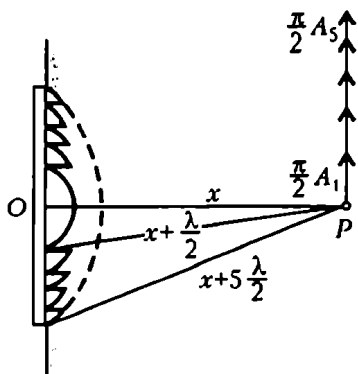


Рис. 7

«станут в строй», развернувшись в том же направлении, что и возмущения от нечетных зон. Очевидно, что суммарный сигнал в точке P еще увеличится.

А нужно ли так грубо обращаться с фазой? Мы ведь можем так отшлифовать эти стеклянные кольца, чтобы в пределах каждой зоны они плавно изменяли фазы проходящего через них света, компенсируя геометрическое запаздывание (рис.7; сплошная изогнутая линия слева). В результате

полуокружность диаметром A_1 развернется в отрезок длиной $\frac{\pi}{2} A_1$. То же самое произойдет в каждой зоне Френеля, так что вся спираль развернется в один отрезок прямой – и в точке P будет достигнута максимально возможная освещенность.

Но зачем же изготавливать из стекла такое ступенчатое тело? Ведь это даже и неудобно. Поэтому добавим в каждой зоне такую толщину стекла, которая вносила бы разность хода в целое число длин волн, обеспечивая при этом плавные обводы (рис.7; штриховая линия слева). Ба! Да ведь это же линза! А точка P , о которой мы так заботились, – ее фокус.

Так ради чего старались? А ради того, чтобы понять, что и просто круглое отверстие обладает свойствами линзы. Причем у этой «линзы» много «фокусов» (см. рис.4), между которыми расположены точки минимальной интенсивности. А куда же делась энергия из этих точек? Никуда, просто она перераспределилась в плоскости, перпендикулярной оси, так что каждая «темная» точка оказалась окруженной системой светлых колец.

СВИСТ ПОЕЗДА И СВЕТ ГАЛАКТИК

*...всегда до ушей достигают
Медленней звуки, чем то, что дает впечатления глазу.
В этом нетрудно тебе убедиться:*

*коль издали смотрим,
Как дровосек топором двусторонним деревья срубает,
Видим мы раньше удар, а потом уже звук раздается
В наших ушах. Потому мы и молнию видим сначала,
Прежде чем слышится гром...*

Лукреций

Итак, уже древние физики-философы знали, что звук движется медленнее света, во всяком случае, что скорость звука конечна (т.е. ограничена по величине). Но что любопытно: ни один ученый древности не отмечает еще одно явление, связанное с распространением волн, а именно изменение высоты звука при перемещении его источника относительно слушателя. В нашу эпоху этот факт, известный как эффект Доплера, регистрируется и используется в случае не только звуковых волн, но и электромагнитных тоже. Однако рассмотрим все по порядку: сначала акустику, затем оптику.

Пусть источник звука неподвижен, а приемник движется к нему со скоростью v (рис.1,а). Если в данный момент времени расстояние между источником и приемником x , то на нем

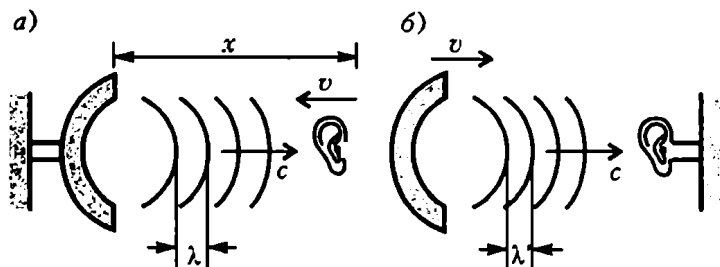


Рис. 1

уместилось бы число волн $N = x/\lambda = xv/c$, где λ – длина волны, излучаемой источником, v – частота излучения, c – скорость звука (будем специально обозначать ее так же, как и скорость света). Но пока приемник доберется до источника, пройдет дополнительно время $\Delta t = x/v$, и за это время источник излучит еще $\Delta N = v\Delta t$ волн. Итого, приемник зарегистрирует $N + \Delta N$ колебаний, что равносильно частоте

$$v' = \frac{N + \Delta N}{\Delta t} = \frac{xv/c + vx/v}{x/v} = v \left(1 + \frac{v}{c} \right).$$

Перепишем эту зависимость в безразмерном виде:

$$\frac{v'}{v} = 1 + \frac{v}{c}. \quad (1)$$

Теперь поменяем местами приемник и источник звука (рис. 1, б). Пусть приемник звука неподвижен, а источник движется к нему со скоростью v . При этом длина волны в неподвижном воздухе уменьшается:

$$\lambda' = \lambda \frac{c - v}{c},$$

где λ – длина волны в случае неподвижного источника (при $v=0$). (Отсюда, видно, например, что при $v=c$ получим $\lambda' = 0$: «хвост» волны догоняет ее «голову».) Тогда, неподвижный приемник будет «слышать» звуковую волну длиной λ' , которой соответствует частота

$$v' = \frac{c}{\lambda'} = v \frac{c}{c - v}.$$

Или в безразмерном виде:

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{1 - v/c}. \quad (2)$$

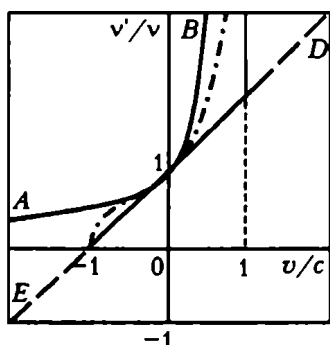


Рис. 2

На рисунке 2 изображены графики, соответствующие выражениям (2) и (1). Отметим характерные особенности кривых AB и ED .

При $v/c = 0$ (источник и приемник неподвижны относительно воздуха) частота звука не искажается: $v' = v$. При $v/c \rightarrow 1$ (кривая $1B$) источник все быстрее налетает на приемник, частота звука растет: бас, излучаемый источником, воспринимается как комариный писк, при

еще больших скоростях становится ультразвуком, а при $v \geq c$ уже не достигает источника – невозможно, например, услышать сверхзвуковой самолет, пока он не долетит до приемника лично. Если же v/c становится отрицательной величиной, т.е. источник звука удаляется от приемника (кривая $A1$), воспринимаемый звук оказывается ниже испускаемого.

В случае приближения приемника к источнику звука частота принимаемого звука растет (участок $1D$), в случае удаления – падает, причем в этом последнем случае улетающий приемник будет обгонять волны в обратном порядке (см. штриховой участок прямой $1E$ при $v/c < -1$). Конечно, в окрестностях точек $v/c = \pm 1$ должно происходить еще что-то интересное – ведь в воздухе перед приемником может возникнуть скачок уплотнения, который должны будут преодолевать звуковые волны, прежде чем попасть в регистрирующий их приемник, так что потребуются уточнение теории. Ибо в этом скачке все параметры газа (давление, температура и плотность) отличаются от атмосферных.

Посмотрим, как на деле «работают» полученные формулы. Пусть по мосту через пропасть между двумя участками туннеля движется поезд (рис.3) со скоростью v , а его свисток излучает звук частотой ν . Прежде всего, согласно формулам (1) и (2), неподвижные наблюдатели Антон (A) и Борис (B) будут воспринимать звуки с частотами $\nu_{A1} = \nu/(1 - v/c)$ и $\nu_{B1} = \nu/(1 + v/c)$. Эти три частоты изображены на рисунке 3 вверху в виде

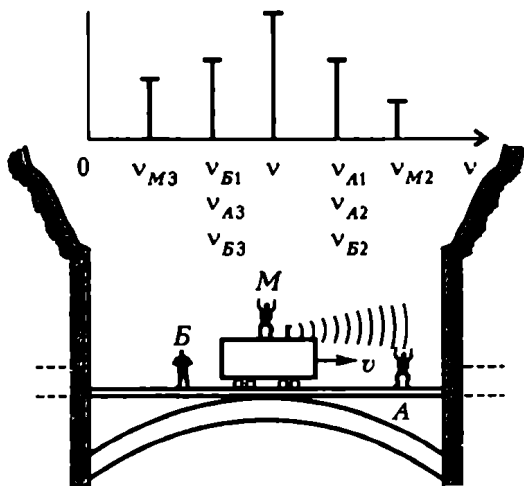


Рис. 3

отрезков, высота которых качественно характеризует интенсивность звука. Ясно, что для наблюдателей A и B эта интенсивность меньше, чем для машинистки Маши (M) – просто оттого, что звуковые «лучи» расходятся во все стороны. Дойдя до стенок туннеля (предполагаем, что они вертикальны) звуковые волны отражаются, и их, в принципе, могут зарегистрировать все три наблюдателя. Волны, отраженные от правой стенки, придут к A , B и M с частотами $\nu_{A2} = \nu_{A1}$, $\nu_{B2} = \nu_{A1}$ и $\nu_{M2} = \nu(1 + v/c)/(1 - v/c)$, потому что эта правая стенка служит как бы излучателем звука частотой $\nu_{A1} = \nu/(1 - v/c)$. Левая стенка служит излучателем звука частотой $\nu_{B1} = \nu/(1 + v/c)$ и снабжает неподвижных слушателей звуками той же частоты: $\nu_{A3} = \nu_{B1}$, $\nu_{B3} = \nu_{B1}$, а удаляющийся от этой стенки наблюдатель M услышит звук частотой $\nu_{M3} = \nu(1 - v/c)/(1 + v/c)$.

Учитывая многократные отражения свистка паровоза от вертикальных стенок туннеля, вдумчивый читатель может самостоятельно обогатить палитру звуков, воспринимаемых тремя наблюдателями.

Выше уже было упомянуто, что частота принимаемого звука совпадает с частотой излучаемого ($\nu' = \nu$), только если приемник и источник неподвижны относительно воздуха; подчеркнем здесь еще раз – именно относительно воздуха, а не относительно друг друга. Действительно, если, например, источник движется за приемником вправо и оба они движутся со скоростью звука (следовательно, их относительная скорость равна нулю), то излучаемый звук никогда не достигнет приемника – где уж тут говорить о неискаженной частоте! Это происходит потому, что звуковые волны распространяются в материальной среде, обладающей инертностью (и упругостью). В этом случае важно подчеркивать, что движется относительно среды – приемник или излучатель волн, поэтому выше и получились различные формулы для принимаемой частоты.

Другое дело – оптика. Тут определяющую роль играет именно относительная скорость V приемника и источника. Не вдаваясь в тонкости преобразований Лоренца, приведем окончательный результат:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 \pm V/c}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (3)$$

Здесь знак «плюс» соответствует случаю сближения приемника и излучателя электромагнитных волн, «минус» – удаления их друг от друга, c – теперь уже скорость света (а не звука), а для

относительной скорости специально использована другая буква V (а не v), чтобы еще раз подчеркнуть отличие оптики от акустики.

Соответствующая выражению (3) кривая изображена на рисунке 2 штрих-пунктиром. Видно, в частности, что, если скорости v или V малы (по сравнению со своим «масштабом» c), то формулы для относительного сдвига частот звуковых и электромагнитных волн одинаковы:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v' - v}{v} \approx \frac{v}{c} \quad \text{или} \quad \frac{V}{c}. \quad (4)$$

Эта приближенная формула является самой простой оценкой доплеровского сдвига частот, причем как в акустике, так и в оптике. Теперь ясно, например, что из-за вращения Солнца один край его диаметра (движущийся к нам) должен быть синее, а другой (уходящий от нас) – краснее, чем центр его диска. И если мы обладаем достаточно чувствительным измерителем разности частот, то при помощи формулы (4) мы найдем линейную (окружную) скорость и, следовательно, скорость вращения звезды.

Тут уместно вспомнить анекдотичный случай с одним Физиком, автомобиль которого остановил Полисмен за движение на красный свет. Физик объяснил, что при сближении со светофором красный свет кажется зеленым. Зная характерные длины волн для этих участков спектра ($\lambda_{\text{кр}} \approx 0,65$ мкм, $\lambda_{\text{зел}} \approx 0,55$ мкм), по формуле (3) можно рассчитать или по формуле (4) оценить эту скорость – она более ста миллионов километров в час. Поэтому Полисмен все-таки оштрафовал Физика – за превышение скорости в городе.

Эффект Доплера сыграл большую роль в космологии. Астрономические наблюдения показали, что чем дальше находится галактика, тем больше ее излучение сдвинуто в красную сторону спектра («красное смещение») и, значит, тем быстрее она удаляется от нас: $v = Hr$. Это выражение получило имя закона Хаббла, а коэффициент пропорциональности H – постоянной Хаббла. Картина похожа на разлет осколков при сильном взрыве. Так появилось понятие Большого Взрыва – исходной точки нашей Вселенной. В настоящее время постоянная Хаббла принимается равной $H \approx 50$ км/с на миллион парсеков. Поскольку 1 парсек $\approx 3 \cdot 10^{13}$ км, то $H \approx 2 \cdot 10^{-18}$ с⁻¹. Обратная H величина не случайна – это время: $1/H = \tau_H \approx 5 \cdot 10^{17}$ с ≈ 20 млрд. лет. И оно имеет определенное отношение к возрасту Вселенной, а будучи умноженным на скорость света, дает оценку современного размера Вселенной: $R \sim \tau_H c \sim 10^{26}$ м.

ИЗ ГЛУБИН ВСЕЛЕННОЙ

*Медленный шепот раздался в его ушах...
Словно тихая молния, пронзил его сердце далекий
голос, повторявший печально на неземном
языке:*

– Где ты, где ты, где ты, Сын Неба?

А.Н Толстой. Аэлита

Когда ученые задумались о возможности радиосвязи с внеземными цивилизациями, среди множества вопросов возник и такой: каким образом представители различных звездных систем могли бы сообщать друг другу информацию, например о своих собственных размерах. Что подумают, скажем, разумные жители систем Альфа Центавра или Тау Кита, если мы выразим свой рост в футах или расстояние между ушами – в локтях? Едва ли им известны эти единицы измерения – тем более что неизвестно, есть ли у них вообще уши, локти или ступни (футы). Не легче обстоит дело и с метрами – ибо это сугубо земная единица длины. И с другими тоже. Следовательно, можно ожидать, что за единицу длины разумные межзвездные корреспонденты должны были бы выбрать некоторую объективную длину, во-первых, одинаковую во всех частях Вселенной и, во-вторых, само понятие о которой должно возникнуть только при определенном уровне развития цивилизации (по крайней мере, когда у последней уже появились радиотелескопы) – а иначе зачем с ней и связываться?

И тут ученые вспомнили о длине волны $\lambda = 21$ см, излучаемой нейтральным атомарным водородом. Но – все по порядку.

Еще в 1933 году были обнаружены радиоволны, идущие от центра Галактики, в широком диапазоне длин волн. Директор Лейденской обсерватории Я.Оорт, высоко оценив это открытие, добавил, однако, что неплохо бы найти особую радиочастоту, которая сыграла бы в радиоастрономии такую же роль, как спектральные линии в оптике. И его молодой студент Ван де Хюлст в 1944 году нашел такую частоту: $\nu = 1420$ МГц, что и соответствует длине волны $\lambda = 21$ см.

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1996 год.

Но что значит «нашел»? Не споткнулся же он о нее на тротуаре Лейдена? Прежде всего, он знал, где искать – конечно, в спектре излучения водорода, которого во Вселенной очень много. Далее, она не должна принадлежать к ультрафиолетовому, видимому, инфракрасному диапазонам спектра – иначе какая же это радиочастота? Потом желательно, чтобы она не генерировалась процессами на Земле – чтобы не было помех... Наверное, что-то в этом роде и думал студент.

Как известно, энергия электрона в атоме может принимать только дискретный набор значений $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, т.е. каждый энергетический уровень имеет свой номер, выражаемый натуральным числом. И если электрон переходит из энергетического состояния n в состояние m , то излучается электромагнитная волна, частота которой ν_{nm} или длина волны λ_{nm} определяются соотношением

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{c}{\lambda_{nm}}, \quad (1)$$

где $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Понятно, что в случае излучения должно выполняться условие $E_n > E_m$, т.е. электрон должен переходить в состояние с меньшей энергией. Если вы рассмотрите кулоновское (электростатическое) притяжение электрона и протона в атоме водорода и учтете правило квантования Бора, то получите радиусы орбит электрона (в частности, нам пригодится $r_1 = 0,5 \text{ \AA}$) и дискретный набор оптических частот согласно формуле (1), например серию Бальмера (при $m = 2$).

Однако электрон и протон взаимодействуют не только электростатически. Оказывается, каждый из них похож еще и на

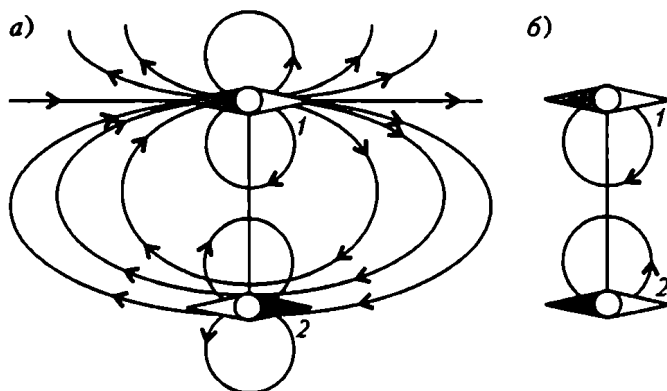


Рис. 1

маленький магнитик. Значит, их взаимодействие будет похоже и на взаимодействие двух магнитных стрелок (рис. 1). Если стрелки расположить рядом, то (в отсутствие магнитного поля Земли) они развернутся антипараллельно: каждая из них расположится вдоль магнитного поля другой стрелки. На рисунке 1, *a* и изображено это устойчивое положение равновесия (состояние *a*). Если мы, закрепив стрелку 1, насильно развернем стрелку 2 на 180° (назовем это состояние *b*) и затем предоставим самой себе, то она обязательно примет прежнее положение. Это означает, что в состоянии *a* потенциальная энергия стрелки 2 в магнитном поле стрелки 1 меньше, чем в состоянии *b*: $E_a < E_b$, хотя расстояния между их центрами одинаковы в обоих случаях. И если на месте этой нижней стрелки представить себе электрон-магнитик, то, согласно формуле (1), он должен излучать электромагнитную волну при таком «перевороте» без изменения расстояния до верхней стрелки (т.е. «радиуса орбиты»).

Конечно, эти макроскопические образы дают только грубый намек на принципиально квантово-механическое явление – излучение радиоволны атомом водорода при «опрокидывании» магнитного момента электрона $\vec{\mu}_e$ относительно магнитного момента ядра (протона) $\vec{\mu}_p$. Но продолжим. Прежде всего, что такое магнитный момент? Уже ясно, что это должен быть некий вектор – ведь при повороте магнитной стрелки на какой-то угол вся картина ее магнитного поля поворачивается на тот же угол. А как описать «силу» магнита, как описать численно тот факт, что один магнит «сильнее» другого?

Согласно гипотезе Ампера, магнитное поле стрелки можно объяснить циркулирующими внутренними электрическими токами. Представьте себе для простоты эти токи текущими по квадратной рамке (рис. 2). Вектор магнитного момента верхней магнитной стрелки (верхнего контура с током) $\vec{\mu}_1$, направлен так, что с его вершины ток I_1 , создающий магнитное поле стрелки, направлен против часовой стрелки. (Такой выбор направлений соответствует так называемой правой системе координат, принятой в настоящее время для описания законов физики.)

Найдем магнитное поле, порождаемое током I_1 на расстоянии r , много большем, чем размер рамки ($r \gg a$). Как известно из электростатики, величина напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r равна $E \sim q/r^2$ (закон Кулона). Точно так же в магнитостатике величина магнитного поля, порожденного «точечным» участком тока (ведь $a \ll r$), равна $B \sim I a/r^2$ (закон Био-Савара-Лапласа). А чтобы запи-

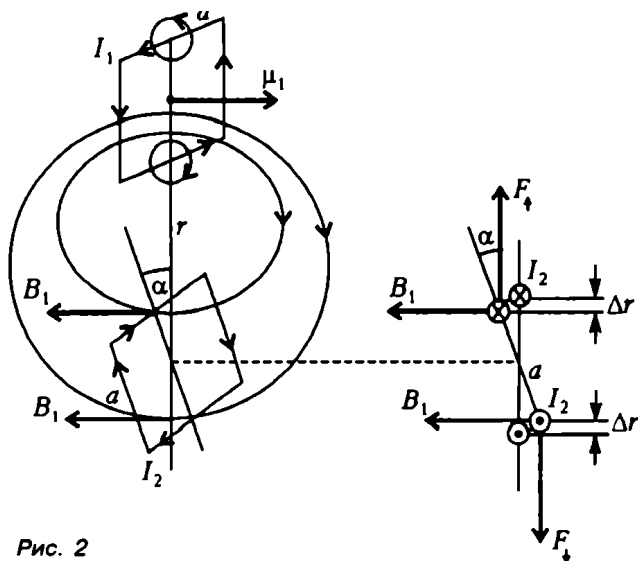


Рис. 2

сать эти зависимости в виде равенств, ставят еще множители, зависящие от выбранной системы единиц, – например $1/(4\pi\epsilon_0)$ в единицах Международной системы (СИ) для закона Кулона.

Далее, магнитное поле на расстоянии r порождают все четыре участка с током рамки 1, поэтому получаем

$$B_1 \sim \frac{I_1 a^2}{r^3}.$$

Вот тут уже видна и величина магнитного момента: $\mu_1 = I_1 a^2$. Если мы выберем единицы СИ, то в полученной формуле нужно поставить еще множитель 10^{-7} . Итак, поле магнита с моментом $\bar{\mu}_1$ подобно полю рамки площадью a^2 с током I_1 , и его индукция на большом расстоянии равна

$$\bar{B}_1(r) = -\frac{\bar{\mu}_1}{r^3} \cdot 10^{-7}. \quad (2)$$

Знак «минус» указывает, что поле в рассматриваемой точке противоположно направлению вектора магнитного момента, создающего это поле.

Пусть теперь в этом месте находится вторая рамка с током I_2 («в этом месте» означает, что центр второй рамки расположен на расстоянии r от центра первой рамки, но размер ее конечен – пусть тоже равен a и тоже много меньше r). Легко убедиться, что положением равновесия рамки 2 в поле рамки 1 является такое положение, при котором ток I_2 направлен противоположно I_1 ,

или вектор магнитного момента $\vec{\mu}_2$ направлен вдоль поля \vec{B}_1 , созданного первой рамкой. Для этого повернем плоскость рамки 2 на некоторый угол α по отношению к вертикали (см. рис.2). Согласно закону Ампера, на верхнюю сторону рамки действует сила $F_{\uparrow} = B_1 I_2 a$, на нижнюю – сила $F_{\downarrow} = -B_1 I_2 a$, и они стремятся развернуть рамку в положение $\alpha = 0$, что и требовалось доказать.

А какую работу нужно совершить для поворота рамки 2 на угол α ? Из рисунка видно, что нужно работать против сил F_{\uparrow} и F_{\downarrow} на двух участках пути длиной $\Delta r = a(1 - \cos \alpha)/2$ каждая. Значит, искомая работа равна

$$A = 2B_1 I_2 a \frac{a}{2} (1 - \cos \alpha) = I_2 a^2 B_1 (1 - \cos \alpha).$$

И снова видим знакомое произведение $I_2 a^2$. Теперь-то мы уже знаем, что это модуль вектора магнитного момента $\vec{\mu}_2$! Поэтому с учетом равенства (2) работу можно записать так:

$$A = \mu_1 \mu_2 \cdot 10^{-7} \frac{1 - \cos \alpha}{r^3}.$$

Видно, что совершенная нами работа зависит от угла поворота рамки 2. Нам особенно интересны случаи $\alpha = \pi$ и $\alpha = 0$, когда векторы магнитных моментов параллельны или антипараллельны. При $\alpha = \pi$ имеем $1 - \cos \alpha = 1 - (-1) = 2$, а при $\alpha = 0$ имеем $1 - \cos \alpha = 1 - 1 = 0$. Следовательно, разность значений потенциальной энергии повернутой рамки 2 в поле рамки 1 для этих двух положений равна

$$\Delta W = \frac{2\mu_1 \mu_2}{r^3} 10^{-7}.$$

А теперь предположим, что эти наши макроскопические образы применимы для описания системы протон–электрон (нейтральный атом водорода). В справочнике по физике можно найти их магнитные моменты:

$$\mu_1 = \mu_p = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ А} \cdot \text{м}^2,$$

$$\mu_2 = \mu_e = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$$

(видно, кстати, что электрон как магнит намного «сильнее» протона). Расстояние между ними – это радиус орбиты основного состояния (мы его уже выписывали) $r_1 = 0,5 \cdot 10^{-10}$ м. Тогда, согласно формуле (1), получим

$$\lambda = \frac{hc r_1^3}{2\mu_e \mu_p \cdot 10^{-7}} \lesssim 1 \text{ м}.$$

Конечно, это не точно 21 см, но совсем неплохо, учитывая приближенность классического подхода к такому квантово-механическому явлению, как взаимодействие моментов электрона и ядра. Во всяком случае это радиолиния. В лабораторных экспериментах эту линию получить трудно. Во-первых, трудно получить сам атомарный водород, поскольку при столкновениях атомы будут сливаться в молекулы. Можно, конечно, заставить молекулы, наоборот, диссоциировать на атомы, например нагревая газ до нескольких тысяч градусов. Но это будет газ из возбужденных атомов, а нам они нужны в основном, энергетически наименее состоянии. Да и ждать спонтанного поворота магнитного момента электрона долговато (это происходит один раз в 11 миллионов лет). Но в масштабах Вселенной на любом луче зрения находятся миллионы миллиардов триллионов... атомов водорода. И поэтому независимо от того, есть ли разумная жизнь еще где-либо, исследования свечения неба на длине волны $\lambda = 21$ см (или частоте $\nu = 1420$ МГц) имеют особое значение, так как водород – наиболее распространенный элемент во Вселенной. Радионаблюдения нейтрального водорода (спектро-скописты обозначают его HI) позволили найти распределение плотности, температуру межзвездной среды (она оказалась порядка 100 К), проекцию скорости движения излучающих масс на луч зрения. Удалось проследить расположение спиральных рукавов нашей Галактики и определить скорость вращения в зависимости от расстояния до центра.

В отличие от электромагнитных волн оптического диапазона (т.е. видимого света), длина которых $\lambda \sim 0,35 - 0,7$ мкм сравнима с размерами частиц межзвездной пыли, радиоизлучение на волне 21 см почти не поглощается пылью, что дает возможность «проникать» далеко в область ядра Галактики и даже по другую сторону от него. (Понятно почему: каждая пылинка под действием электрического поля электромагнитной волны поляризуется и колеблется в «такт» с возбуждающим полем волны. Таким образом, она превращается в микроантенну, переизлучающую энергию волны во все стороны. И если размер этой «антенны» сравним с длиной падающей волны, это рассеяние энергии происходит наиболее жадно. А если пылинка-антенна много меньше длины волны, им просто нет дела друг до друга.)

Итак, если вы ждете сообщений от далекой Аэлиты – ждите его на длине волны 21 сантиметр...

Приложение к журналу «Квант» №4/2004

А.Л.Стасенко

ФИЗИЧЕСКИЕ НОВЕЛЛЫ ДЛЯ «ШКОЛЫ В «КВАНТЕ»

Редактор *В.А.Тихомирова*
Технический редактор *Е.В.Морозова*
Компьютерная группа
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ИБ № 71

Подписано к печати 31.05.04. Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр.
Гарнитура кудряшевская. Печать офсетная. Объем 4 печ.л.

Тираж 5000 экз. Заказ 10269
119296 Москва, Ленинский пр., 64-А,
«Квант»

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел. (095) 234-01-10